



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : Université Paul Sabatier (Toulouse III)

---

---

Présentée et soutenue le 16 Juin 2014 par :

**Daniel Kiouss**

**Processus aléatoires inter-agissants et milieux aléatoires**

---

---

### JURY

FRANCIS COMETS	Université Paris Diderot	Rapporteur
MICHEL LEDOUX	Université Paul Sabatier	Directeur
LAURENT MICLO	Université Paul Sabatier	Examineur
THOMAS MOUNTFORD	EPFL, Lausanne	Examineur
CHRISTOPHE SABOT	Université Lyon I	Examineur
PIERRE TARRÈS	CEREMADE, Paris Dauphine	Directeur
BÁLINT TÓTH	University of Bristol et TU Budapest	Examineur

---

**École doctorale et spécialité :**

*Mathématiques Informatique Télécommunications (MITT)*

**Unité de Recherche :**

*UMR 5219*

**Directeurs de Thèse :**

*Michel LEDOUX et Pierre TARRÈS*

**Rapporteurs :**

*Francis COMETS (Université Paris Diderot - Paris VII)*

*Wendelin WERNER (ETH Zürich)*



# Remerciements

Je tiens tout d’abord à signifier mon immense reconnaissance à Pierre Tarrès, sans qui je n’aurais certainement pas pu écrire cette thèse. Scientifiquement, il fut un excellent encadrant, me faisant profiter de toutes ses connaissances et de toute son expertise. Il fut toujours présent, tout en me laissant mon entière liberté et mon indépendance. Mais j’ai particulièrement apprécié nos longues et nombreuses conversations durant lesquelles Pierre m’a donné beaucoup de conseils précieux, à propos de tout, parfois de maths, me faisant profiter, avec une générosité que je n’oublierai pas, de son expérience, de son recul et de sa sagesse. Je le remercie aussi pour toute son amitié. Je suis très honoré et très fier d’avoir eu un si bon directeur, que je n’ai pas fini d’admirer et d’apprécier.

Je tiens également à remercier Michel Ledoux pour son soutien constant et pour sa très grande disponibilité qui m’a été utile plus d’une fois. J’ai beaucoup apprécié sa gentillesse et ses mots d’encouragement.

Je remercie profondément Francis Comets d’être rapporteur de cette thèse et membre du jury. Ceci est un très grand honneur pour moi. Il a été, sans doute sans le savoir, une des sources de motivations pour les travaux de cette thèse.

Je tiens aussi à exprimer ma très grande gratitude à Wendelin Werner, rapporteur de ma thèse. C’est un immense honneur, et il est presque inutile de préciser l’influence qu’il a eu sur moi et sur mon travail, depuis mes premières lectures de vulgarisation, jusqu’aux articles de recherche qui ont servi de socle et d’inspiration à cette thèse.

Ensuite, je veux remercier chacun des membres du jury. Tout d’abord, j’ai eu la chance de croiser le chemin de Christophe Sabot à plusieurs reprises, et ce fut à chaque fois un immense plaisir et un grand honneur. Je suis particulièrement heureux que Laurent Miclo ait accepté d’être dans mon jury, lui qui m’a, à plusieurs reprises, fortement soutenu et encouragé, avec toute l’énergie et la bonne humeur qui le caractérisent. Je suis également très touché que Tom Mountford fasse partie de mon jury. Je garde un très bon souvenir de ma courte visite à l’EPFL, et j’ai vraiment hâte d’y passer plus de temps ! Enfin, c’est un immense honneur d’avoir Bálint Tóth dans mon jury : *dear Bálint, so many thanks for your work which has been so useful to mine, and many thanks for your encouragement and all your kind remarks when we met in Paris. They mean a lot to me.*

---

D'autre part, j'ai eu l'honneur et l'immense plaisir de travailler avec Alexander Fribergh. J'apprécie beaucoup l'importance qu'il donne à l'intuition, ce qui m'a permis d'apprendre beaucoup, très vite, et de manière très agréable. Je le remercie, de façon bien plus personnelle, pour son amitié, et pour tout l'aligot qu'il a pu apporter à la maison !

Je souhaite remercier également Zhan Shi, superviseur de mon mémoire de M2, qui m'a éclairé et encouragé. Je tiens beaucoup à remercier Cédric Boutillier et Olivier Zindy qui ont su, non seulement me donner le goût des probabilités, mais aussi me rassurer dans mes choix lorsque j'étais dans le doute.

Je remercie celles qui m'ont très chaleureusement accueilli dans le bureau 203 : Alice, Julie et Sandrine. Puis, je remercie ceux qui ont pris la relève, Raphaël, Yuriy et Sofiane qui sont toujours là pour détendre l'atmosphère de diverses manières, redoublant d'inventivité... Merci aux voisins Benoit, Stéphane, Kevin, et Adil pour qui j'ai une pensée spéciale, car, entre autres, il m'a fait l'honneur d'être son presque-témoin. Merci à tous les membres de l'équipe de probabilités que je ne cite pas.

Je tiens aussi à remercier toute l'équipe administrative de l'Institut de Mathématiques, tout particulièrement Martine Labruyère, Françoise Michel et Agnès Requis qui ont, au cours de ces trois ans, répondu à un bon millier de mes questions, toujours avec beaucoup de gentillesse et de bonne humeur.

Je dois absolument remercier mes amis de longue date : Abel, Alex B, Aurélie, Clémence, Didier, Gautier, Jeff, Kevin N, Martin, Nico, Robin, Romain, Thomas, Yohan... et tous ceux que j'oublie ! Et je tiens à adresser des remerciements spéciaux à mon ami Kevin Kuoch qui lui aussi soutiendra bientôt !

Je remercie ma mère et mon père. Il me faudrait rédiger une autre thèse pour décrire les efforts, les sacrifices et l'amour qu'ils ont consacrés à leurs enfants. Merci pour tout ! Rien n'aurait pu être mieux. Mon frère Marco, mes soeurs Lydia et Katia, ainsi que Julien et la petite Livia, sont évidemment au coeur de tout ça. On ne peut pas dire que je suis un petit frère qui a manqué d'amour, de joie, de rire, ou de quoi que ce soit.

Je remercie aussi ma belle famille, Fuentes et Muela, mais en particulier Jean-Marie et Isabel. Ils m'ont accueilli à bras ouverts, avec une gentillesse et une douceur qui les définissent. Merci pour tout ce que vous nous apportez.

Les meilleures pour la fin. Sans ma compagne Elodie, absolument rien ne se serait passé en trois ans. Je la remercie pour tout l'amour qu'elle me donne et je la remercie d'être comme elle est, si belle, si joyeuse, si drôle et si intelligente. Elle a été la source de beaucoup d'inspiration et m'a constamment soutenu. Enfin, j'ai l'incroyable bonheur d'être en train d'écrire ces remerciements à côté de notre fille Alma, qui est à peine née et qui est pourtant une très puissante motivation depuis plusieurs mois ! Merci aussi à toi, Alma, de conclure ces trois ans d'une si belle façon.

# Résumé

Nous nous intéressons tout d'abord à une certaine classe de marches aléatoires interagissantes sur  $\mathbb{Z}$  qui fut définie en 2010 par Erschler, Tóth et Werner dans l'article *Stuck Walks* [38]. Dans ce modèle, une compétition entre répulsion à petite distance et attraction à plus grande distance s'installe. Erschler, Tóth et Werner ont prouvé que, pour tout entier  $L \geq 1$ , si le paramètre  $\alpha$  appartient à un certain intervalle  $(\alpha_{L+1}, \alpha_L)$ , alors ces marches se localisent sur  $L + 2$  sites avec probabilité strictement positive. Ils ont également conjecturé que cela se produit presque sûrement. Nous démontrons partiellement cette conjecture, en prouvant que la marche, sous les mêmes hypothèses, se localise sur  $L + 2$  ou  $L + 3$  sites presque sûrement. Nous prouvons également que, si  $\alpha > 1$ , alors la marche se localise p.s. sur 3 sommets.

Dans une deuxième partie, nous introduisons les marches aléatoires en environnements aléatoires. Plus précisément, nous considérons des marches dans des environnements elliptiques i.i.d. sur  $\mathbb{Z}^d$ . L'objectif de notre travail, en collaboration avec Alexander Fribergh, est d'étudier sous quelles conditions d'ellipticité des pièges locaux apparaissent. Notre principal résultat établit un critère d'ellipticité qui implique la ballisticité de ces marches lorsqu'elles vérifient certaines hypothèses de transience. Ce critère s'intéresse au temps de sortie d'un hypercube unité.

Enfin, nous proposons, en collaboration avec Pierre Tarrès, un nouveau modèle de formation de réseaux sociaux basé sur l'apprentissage par renforcement : nous étudions un jeu sur un graphe représentant des individus et leurs liens, et qui modélise l'évolution de relations sociales. Nous considérons un graphe général, ayant des poids sur ses arêtes et sur ses sommets qui représentent respectivement des affinités et des propensions à communiquer.

Nous prouvons que l'espérance conditionnelle du gain croît en moyenne et donc converge p.s. Nous prouvons également que les configurations stables sont constituées de composantes connexes en forme d'étoile, avec des poids équilibrés.

Finalement, nous montrons que tout graphe qui correspond à cette description, et tel qu'aucun sommet ne tombe hors d'usage, est une configuration limite avec probabilité

---

strictement positive.

Dans l'introduction, nous donnons une vue d'ensemble des trois sujets abordés : les marches inter-agissantes, les marches en milieux aléatoires et l'apprentissage par renforcement. Nous y énonçons les résultats obtenus et nous évoquons les techniques utilisées pour les démontrer.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1	Marches aléatoires inter-agissantes . . . . .	2
1.1	Marches aléatoires renforcées . . . . .	3
1.2	<i>Stuck Walks</i> : une conjecture d'Erschler, Tóth et Werner . . . . .	14
2	Marches aléatoires en milieux aléatoires . . . . .	22
2.1	Introduction et critère de ballisticité en dimension 1 . . . . .	23
2.2	En dimension $d \geq 2$ : conditions $(T)$ et $(P)$ , uniforme ellipticité et ballisticité . . . . .	28
2.3	Critères d'ellipticité : résultats obtenus en collaboration avec A. Fribergh . . . . .	33
3	Apprentissage par renforcement pour des dynamiques de réseaux sociaux	38
3.1	<i>Signaling game</i> et algorithmes stochastiques . . . . .	39
3.2	Résultats obtenus en collaboration avec P. Tarrès . . . . .	43
<b>2</b>	<b>Stuck Walks</b>	<b>51</b>
1	Introduction . . . . .	52
2	Sketch of the proof of Theorem 1.4 . . . . .	54
3	Monotonicity of the time-line construction and martingale arguments . .	61
3.1	Proof of Proposition 2.6 . . . . .	62
3.2	Proof of Proposition 2.7 . . . . .	63
4	Trigonometric results . . . . .	64
4.1	Definition of the linear system . . . . .	64
4.2	Small-size system : $K \in \{0, \dots, L + 1\}$ . . . . .	65
4.3	Associated affine medium-size system : $K = L$ . . . . .	68
4.4	Non-negative solutions of the large-size system, i.e. $K \geq L$ , and proof of Lemma 2.3 . . . . .	70
5	The walk has finite range : Proof of Proposition 2.1 . . . . .	73
6	Asymptotic streams . . . . .	75
6.1	Proof of Proposition 2.2 . . . . .	75
6.2	Proof of Lemma 2.4 . . . . .	86

## TABLE DES MATIÈRES

---

7	Proof of Theorem 1.5 . . . . .	87
8	Generalizations . . . . .	91
<b>3</b>	<b>Local trapping, with A. Fribergh</b>	<b>93</b>
1	Introduction . . . . .	94
1.1	Definition of the model . . . . .	94
1.2	Former results and open questions . . . . .	95
1.3	Plan of the article . . . . .	98
2	Basic notations and regeneration times . . . . .	98
2.1	Regeneration times . . . . .	99
3	Results . . . . .	100
3.1	A criterion for zero-speed . . . . .	100
3.2	A positive speed criterion . . . . .	101
4	Discussion on the main results . . . . .	104
4.1	What does this condition intuitively mean and why? . . . . .	104
4.2	How do we apply the criterion? Why is this criterion general? . . . . .	108
4.3	Why do unit hypercubes appear? . . . . .	114
5	Proof of Theorem 3.5 and Theorem 3.7 . . . . .	117
5.1	Attainability estimates . . . . .	118
5.2	Polynomial condition and atypical quenched exit estimates . . . . .	121
5.3	Estimates on the tail of $\tau_1$ : proof of Proposition 5.1 . . . . .	123
6	Zero-speed regime . . . . .	129
<b>4</b>	<b>Reinforcement learning in social networks, with P. Tarrès</b>	<b>133</b>
1	Introduction . . . . .	134
2	Main results . . . . .	137
3	Stochastic Approximation . . . . .	141
3.1	Analysis of the mean-field ODE . . . . .	143
3.2	Proof of Theorem 2.2 and asymptotic linear growth of $(T_n)$ . . . . .	147
3.3	Proof of Theorem 2.3 . . . . .	150
4	Remarks on the asymptotic behavior at the boundary . . . . .	156
5	Classification of equilibria and stability . . . . .	157
5.1	Properties of Lyapunov function . . . . .	158
5.2	Jacobian matrix . . . . .	159
5.3	Classification of equilibria based on stability . . . . .	160
6	Proof of Theorem 2.8 . . . . .	164



# 1

## Introduction

Nous donnons ici une vue d'ensemble des sujets que nous avons étudiés. Cette thèse s'articule autour de trois travaux principaux.

Tout d'abord, nous étudierons des marches aléatoires inter-agissantes définies par Erschler, Tóth et Werner, et nous énoncerons les résultats que nous avons pu obtenir dans [46].

Dans un deuxième temps, nous introduirons les marches aléatoires en milieux aléatoires. Après avoir rappelé quelques résultats d'importance, nous nous intéresserons en particulier à un critère d'ellipticité, issu de [40] en collaboration avec Alexander Fribergh, qui implique la ballisticité des marches aléatoires en milieux aléatoires qui vérifient certaines conditions de transience.

Enfin, nous introduirons la notion d'apprentissage par renforcement, que nous appliquerons à des dynamiques de réseaux sociaux. Ceci est issu d'un travail [47] en collaboration avec Pierre Tarrès.

# 1 Marches aléatoires inter-agissantes

Le terme *marches aléatoires inter-agissantes* peut regrouper une très grande classe de processus non-markoviens. Ici, notre objectif est de présenter en détail l'un d'entre eux, qui fut défini par Anna Erschler, Bálint Tóth et Wendelin Werner [38], et que nous appellerons les *Stuck Walks*, par un abus de langage.

Les marches inter-agissantes ont une forte influence sur leur propre environnement dans le sens où leur trajectoire passée modifie leur évolution future. En particulier, ces processus ne sont donc pas markoviens (ils ont de la mémoire). Il est légitime de penser que ces processus puissent décrire un bon nombre de phénomènes physiques dans lesquels l'interaction joue un grand rôle.

Même si les liens explicites restent encore à découvrir, de récents travaux de Sabot et Tarrès [65, 66] suggèrent un lien entre les marches renforcées par arêtes et le modèle sigma supersymétrique issu de la physique quantique. Ceci nous donne des raisons de croire que de nombreux liens entre les modèles avec interaction et des modèles physiques sont encore à découvrir. Les polymères browniens, définis par Durrett et Rogers [32], constituent un autre modèle inter-agissant qui prend son origine dans la description de la croissance des polymères, substances composées de macromolécules. Dans [52], Mountford et Tarrès, en plus de résultats sur les polymères browniens, proposent dans l'introduction une bonne vue d'ensemble des liens entre les différents processus inter-agissants.

D'autre part, ce sont les physiciens Amit, Parisi et Peliti dans [1] qui ont défini la “vraie” marche auto-répulsive, qui est un modèle de marches aléatoires sur la droite des entiers présentant une répulsion exponentielle par arête. Ce processus fut étudié par Bálint Tóth [85] en 1995 qui prouva une limite d'échelle non triviale et non gaussienne pour  $X_k/k^{2/3}$ . Tóth et Werner [89] ont ensuite étudié en 1998 la limite d'échelle de ce processus et ont défini le *True self-repelling motion* qui est un processus à temps continu qui est repoussé par son temps local sur son voisinage immédiat.

Une des contributions de cette thèse concerne une généralisation de la “vraie” marche auto-répulsive, définie dans [38, 37] par Erschler, Tóth et Werner, dont l'interaction fait intervenir des arêtes plus éloignées que dans le cas précédent, et peut mêler attraction et répulsion. En fonction de ses paramètres, ce processus peut avoir des comportements très différents. Nous serons ici principalement intéressés par le cas dans lequel il y a une compétition entre répulsion à courte distance et attraction à plus grande distance. Comme nous le verrons plus tard, la marche, dans ces conditions, ne visite qu'un nombre fini de sommets et reste donc *bloquée* sur un certain intervalle, après un certain temps. En conséquence, nous appellerons ces marches les *Stuck Walks*, bien que ce terme désigne un comportement plutôt qu'un processus particulier.

Nous commencerons par définir les marches aléatoires renforcées par arêtes, puis

celles renforcées par sommets. Nous rappellerons les différents résultats obtenus tout d'abord par Davis [24], Sellke [69], puis par Pemantle et Volkov [61]. Enfin, nous évoquerons la preuve, par Tarrès [83], de la localisation presque-sûre sur 5 points de la marche aléatoire linéairement renforcée par sommets. Nous rappellerons brièvement les techniques qui furent utilisées.

Nous aurons ensuite un intérêt tout particulier pour une autre démonstration de ce même résultat, également proposée par Tarrès [84]. Ce second argument utilise une variante de la construction de Rubin et permet des preuves courtes et élégantes.

Les *Stuck Walks* sont une classe de marches aléatoires inter-agissantes mêlant auto-répulsion et auto-attraction. Nous en verrons la définition ainsi que les résultats qui y sont liés dans la deuxième partie de cette section. En particulier, nous énoncerons notre principal résultat issu de [46], présenté en Chapitre 2, qui établit la localisation presque-sûre de ces marches et confirme une conjecture d'Erschler, Tóth et Werner, [38]. Nous donnerons les grandes lignes de la preuve, qui utilise, d'une part, la comparaison des temps locaux avec un certain système linéaire, et d'autre part une généralisation de la variante de la construction de Rubin, initialement définie pour les marches renforcées par sommets.

## 1.1 Marches aléatoires renforcées

Les marches aléatoires renforcées par arêtes furent définies en 1986 par Coppersmith et Diaconis [22]. Il s'agit de marches au plus proche voisin, à temps discret sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 1$ .

Soit  $X := (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un processus à valeurs dans  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 1$ , qui démarre en 0, c'est-à-dire  $X_0 := 0$ . Définissons la filtration engendrée par ce processus  $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n)$  pour tout entier  $n$ . Nous appellerons *fonction de poids* la fonction  $w : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , que l'on suppose le plus souvent croissante. Une marche renforcée par arêtes garde en mémoire le nombre de fois où le marcheur a traversé chaque arête, et y attribue un poids :  $w$  détermine ce poids en fonction du nombre de visites. Pour tous  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  tels que  $\|y - x\| = 1$ , on définit le nombre de fois où le marcheur a traversé l'arête non-orientée  $\{x, y\}$  au temps  $n$  :

$$Z_n(\{x, y\}) := \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_{k-1}, X_k\} = \{x, y\}}.$$

L'évolution de la marche est définie par la probabilité de transition conditionnelle telle que pour tous  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  tels que  $\|y - x\| = 1$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $X_n = x$ , on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | \mathcal{F}_n) := \frac{w(Z_n(\{x, y\}))}{\sum_{j: \|j-x\|=1} w(Z_n(\{x, j\}))}.$$

## CHAPITRE 1. INTRODUCTION

---

Ainsi, à chaque instant, le marcheur va emprunter une des arêtes adjacentes au sommet où il se trouve avec une probabilité proportionnelle au poids de cette arête, ce poids étant défini, à travers  $w$ , par le nombre de fois où il a déjà traversé l'arête.

La question qui fut d'abord posée par Diaconis en 1987 concernait le cas où  $w(n) = 1 + \delta n$ , ce qui correspond au processus pour lequel on augmente le poids d'une arête d'une quantité  $\delta > 0$  à chaque fois qu'on la traverse. On dit alors que la marche est *linéairement* renforcée. Le problème est alors de déterminer pour quelles valeurs de  $\delta$  ce processus est transient ou récurrent. Nous allons citer ici les premiers résultats, datant de 1986 à 1994. L'un des derniers résultats marquants est dû à Sabot et Tarrès et établit d'une part (dans [65]) la récurrence de cette marche aléatoire renforcée par arêtes lorsque  $\delta$  est suffisamment grand sur tout graphe de degré borné, et d'autre part la transience lorsque  $\delta$  est suffisamment petit, sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 3$  (dans [25]).

L'un des premiers résultats est dû à Coppersmith et Diaconis [22] en 1986 qui ont prouvé que, asymptotiquement, la marche renforcée par arêtes sur un graphe fini est en fait un mélange de chaînes de Markov, et explicitent ceci grâce à ce qui est appelé la *formule magique*.

En 1988, Pemantle [56] met en évidence une transition de phase pour la récurrence-transience des marches renforcées par arêtes sur des arbres et donne la valeur de  $\delta$  pour laquelle cette transition a lieu. Cependant, ses méthodes utilisent des résultats sur des marches aléatoires en milieux aléatoires et l'absence de cycles est cruciale, ce qui écarte la possibilité de les généraliser sur  $\mathbb{Z}^d$ .

Le résultat suivant, dû à Davis en 1990, utilise la *construction de Rubin* que nous détaillerons plus loin.

**Théorème 1.1** (Davis, [24]). *Considérons une marche aléatoire renforcée par arêtes  $X$  avec  $w(n) = n + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors,*

$$\mathbb{P}(X \text{ est récurrente}) + \mathbb{P}(X \text{ ne visite qu'un nombre fini de sommets}) = 1.$$

Sellke en 1994 a lui également utilisé la construction de Rubin pour prouver notamment que, sous certaines conditions sur  $w$ , la marche sur  $\mathbb{Z}^d$  reste presque-sûrement bloquée sur une seule arête après un certain temps. Dans le cas où la marche finit par ne visiter qu'un nombre fini de sommets, on dit que celle-ci se *localise*.

**Théorème 1.2** (Sellke, [69]). *Si  $\sum_{n \geq 0} (w(n))^{-1} < \infty$ , alors la marche aléatoire renforcée sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 1$ , reste p.s. bloquée sur une unique arête après un certain temps, autrement dit*

$$\sum_{x, y: ||x-y||=1} \mathbb{P}(X_n \in \{x, y\} \text{ pour tout } n \text{ suffisamment grand}) = 1.$$

*En revanche, si  $d \geq 2$ , et si  $\sum_{n \geq 0} (w(2n))^{-1} = \infty$  et  $\sum_{n \geq 0} (w(2n+1))^{-1} = \infty$ , alors, pour tout  $i = 1, \dots, d$ ,*

$$\mathbb{P}(\sup X_n^{(i)} = +\infty) = \mathbb{P}(\inf X_n^{(i)} = -\infty) = 1,$$

où  $X_n^{(i)}$  est la  $i$ -ième coordonnée de  $X_n$ .

Notons que l'on peut donner une définition des marches aléatoires renforcées par arêtes sur n'importe quel graphe de degré borné, au lieu de ne considérer que  $\mathbb{Z}^d$ . Dans ce cadre, Sellke a émis la conjecture qu'il existe toujours, comme dans le cas du réseau, une "arête attractive" lorsque la fonction de poids est réciproquement sommable : autrement dit, lorsque  $\sum_k (w(k))^{-1} < \infty$ , la marche se localise p.s. sur une arête. Notons qu'aucune condition n'est mise sur la monotonie de la fonction de poids. Cette conjecture n'est toujours pas complètement résolue, mais de bonnes avancées ont été réalisées : la solution la plus générale est due à Tarrès et Limic [49] qui prouve ce résultat en exigeant une condition technique supplémentaire qui relie la fonction de poids à la structure du graphe (voir aussi [50]). Cette condition permet de contrôler la taille des cycles impairs. Un important corollaire du résultat principal de [49] est le résultat suivant qui considère des fonctions de poids croissantes.

**Théorème 1.3** (Corollaire 3 de [49]). *Soit  $\mathcal{G}$  un graphe de degré borné. Soit  $w$  une fonction de poids croissante réciproquement sommable, c'est-à-dire vérifiant*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{w(k)} < \infty.$$

*Alors, la marche aléatoire renforcée par arêtes sur le graphe  $\mathcal{G}$  se localise p.s. sur une arête.*

Nous allons maintenant présenter les marches aléatoires renforcées par sommets, qui obéissent au même genre de dynamiques, excepté que l'on va considérer le nombre de visites sur chaque sommet plutôt que le nombre de fois où l'on a traversé chaque arête.

Donnons une définition des marches aléatoires renforcées par sommets sur un graphe  $(G, \sim)$  localement fini, où, pour tous sommets  $x, y \in G$ ,  $x \sim y$  signifie que  $x$  et  $y$  sont voisins. Dans un souci de simplification, nous garderons beaucoup des notations précédentes. Soit  $X := (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un processus à valeurs dans  $G$ , qui démarre en  $x_0 \in G$ , c'est-à-dire  $X_0 := x_0$ . Nous noterons toujours  $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , avec  $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n)$  pour tout entier  $n$ , la filtration engendrée par ce processus. Comme précédemment, nous considérerons une *fonction de poids*  $w : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ . Comme dans le cas du renforcement par arêtes, une marche renforcée par sommets garde en mémoire le nombre de visites effectuées sur chaque sommet, et y attribue un poids, déterminé par  $w$  en fonction du nombre de visites.

Pour tout  $x \in G$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit le nombre de visites en  $x$  au temps  $n$  par :

$$Z_n(x) := \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{\{X_k=x\}}. \quad (1.1)$$

## CHAPITRE 1. INTRODUCTION

---

Cette quantité est également appelé *temps local en  $x$  au temps  $n$* .

Définissons deux nouvelles variables aléatoires dont nous comprendrons l'utilité plus loin :  $R$  qui est l'ensemble des points visités au moins une fois, et  $R'$  qui est l'ensemble des points visités infiniment souvent, aussi appelé *ensemble de localisation* :

$$R := \{x \in G : Z_\infty(x) > 0\}, \quad (1.2)$$

$$R' := \{x \in G : Z_\infty(x) = \infty\}. \quad (1.3)$$

La loi de  $X$  est déterminée par la probabilité de transition conditionnelle telle que pour tous  $x, y \in G$  tels que  $x \sim y$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $X_n = x$ , on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | \mathcal{F}_n) := \frac{w(Z_n(y))}{\sum_{j: x \sim j} w(Z_n(j))}. \quad (1.4)$$

Ces processus sont en général très délicats à étudier. La difficulté réside principalement dans le fait que ces processus ne sont pas markoviens et que l'on ne dispose que d'une information locale sur la marche.

Une des questions centrales sur ces processus concerne le phénomène de localisation : la marche ne visite-t-elle qu'un nombre fini de sommets ? Si c'est le cas, alors la marche, après un certain temps, sera *bloquée* dans un ensemble connexe fini. Par conséquent, on peut se demander quelle sera la taille de cet ensemble et à quoi ressemblera le profil asymptotique de son temps local. Il est souvent très difficile d'obtenir des résultats qui tiennent avec probabilité 1.

Des résultats sur les graphes finis et complets, pour du renforcement linéaire, furent obtenus par Pemantle [59] en 1992 puis par Benaïm [12] en 1997. Ils utilisent tous les deux la méthode des *algorithmes stochastiques*, dont nous parlerons plus en détail en Section 3. Un résultat plus récent fut également obtenu par Benaïm, Raimond et Schapira [14] en 2012 dans le cas d'un renforcement sur-linéaire avec  $w(n) = (n+1)^\alpha$ , avec  $\alpha > 1$ , sur un graphe fini et complet. Ils prouvent un comportement plus riche que dans le cas du renforcement par arêtes en démontrant qu'une telle marche peut, selon le graphe et le paramètre  $\alpha$ , se localiser sur un ensemble de points arbitrairement grand. Dans ce même article [14], les auteurs prouvent qu'une marche fortement renforcée, c'est-à-dire telle que  $\sum_n (w(n))^{-1} < \infty$ , sur un graphe de degré borné, ne visite qu'un nombre fini de sommets presque-sûrement.

Le renforcement linéaire sur des graphes infinis de degré borné fut également étudié, par Volkov [91] en 1999 puis par Benaïm et Tarrès [15] en 2011. Dans le second article, les auteurs utilisent des méthodes d'algorithmes stochastiques pour généraliser les résultats de [59, 12] qui lient la marche linéairement renforcée aux dynamiques de *réplicateurs*. Ceci leur permet de conclure que le support de tout équilibre stable est un sous-graphe

$d$ -parti, pour un certain  $d \geq 1$ , et que la marche se localise sur ce support avec probabilité strictement positive.

A présent, nous allons uniquement considérer les marches aléatoires renforcées par sommets sur  $\mathbb{Z}$ . Ainsi, deux sommets  $x, y \in \mathbb{Z}$  sont voisins si et seulement si  $y = x \pm 1$ . Nous allons évoquer quelques résultats sur le comportement de ces marches. Ce comportement dépend fortement de la manière dont  $w$  croît.

Dans le cas où  $w(n)$  est de l'ordre de  $n^\alpha$ ,  $\alpha < 1$ , Volkov [92] a démontré en 2006 que  $|R| = \infty$  p.s., et  $|R'| \in \{0, \infty\}$  p.s., où  $R$  et  $R'$  sont définis en (1.2) et (1.3). Pour  $\alpha < 1/2$ , Schapira [68] a prouvé en 2012 que la marche est soit p.s. transiente, soit p.s. récurrente sur  $\mathbb{Z}$ . Enfin, en 2014, il a été démontré que la marche est en fait p.s. récurrente sur  $\mathbb{Z}$ , de manière indépendante par Singh [72] et par Chen et Kozma [20].

Lorsque  $w(n)$  est de l'ordre de  $n^\alpha$ ,  $\alpha > 1$ , il a été énoncé par Volkov [92] que la marche se localise p.s. sur 2 sommets, cependant sa démonstration comportait une erreur et une preuve valide fut finalement proposée par Basdevant, Schapira et Singh [4]. Dans la preuve de ce résultat, les auteurs utilisent la construction de Rubin, dont nous parlerons en Section 1.1.

Ce résultat est en accord avec les résultats obtenus dans le cadre du renforcement par arêtes et utilise en effet que  $\sum_k (w(k))^{-1} < \infty$ .

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons au cas où  $w$  est au moins linéaire, c'est-à-dire  $\liminf_n w(n)/n > 0$ , mais telle que :

$$\sum_k (w(k))^{-1} = \infty. \quad (1.5)$$

Contrairement au cas du renforcement par arêtes, nous verrons dans la section suivante que la localisation peut toujours avoir lieu. Nous nous intéresserons en particulier au cas du renforcement linéaire et à une conjecture de Pemantle et Volkov [61], démontrée par Tarrès [83] qui prouva la localisation p.s. de la marche sur 5 points consécutifs. Nous énoncerons en Section 1.1 un résultat de Basdevant, Schapira et Singh [4] qui vient compléter l'étude des cas où (1.5) est vérifiée.

### **Localisation p.s. sur 5 points des marches aléatoires linéairement renforcées par sommets**

Dans le cas des marches aléatoires linéairement renforcées, la probabilité de sauter sur un des sommets voisins est proportionnelle au nombre de visites déjà effectuées à ce voisin.

Plus précisément, on choisit la fonction  $w$  telle que :

$$w : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

## CHAPITRE 1. INTRODUCTION

---

$$t \mapsto 1 + t.$$

Les premiers résultats obtenus dans ce cadre sont dus à Pemantle et Volkov, en 1999, [61]. Les principaux résultats sont les suivants.

**Théorème 1.4** (Pemantle et Volkov, [61]). *La marche linéairement renforcée par sommets sur  $\mathbb{Z}$  ne visite qu'un nombre fini de sites presque sûrement, c'est-à-dire  $\mathbb{P}(|R| < \infty) = 1$ .*

**Théorème 1.5** (Pemantle et Volkov, [61]).  $\mathbb{P}(|R'| \leq 4) = 0$ .

**Théorème 1.6** (Pemantle et Volkov, [61]). *Avec probabilité strictement positive, la marche visite infiniment souvent exactement 5 sommets, c'est-à-dire  $\mathbb{P}(|R'| = 5) > 0$ .*

Ce dernier résultat a naturellement donné suite à une conjecture.

**Conjecture 1.7** (Pemantle et Volkov, [61]).  $\mathbb{P}(|R'| = 5) = 1$ .

Pierre Tarrès a démontré cette conjecture durant sa thèse, et la preuve fut publiée en 2004, [83].

**Théorème 1.8** (Tarrès, [83]). *La marche linéairement renforcée par sommets se localise sur 5 points presque sûrement.*

Les prédictions de Pemantle et Volkov ainsi que les résultats de Tarrès établissent également le profil asymptotique des temps locaux sur l'intervalle de localisation : notons simplement que la proportion du temps passé sur chaque sommet de l'intervalle de localisation est aléatoire sur certains sommets.

Les travaux de Pemantle et Volkov [61] et de Tarrès [83] utilisent des techniques aujourd'hui classiques pour les processus de renforcement.

Tout d'abord, les marches renforcées sont très fortement liées aux modèles d'urnes. En effet, afin de facilement comprendre le lien, considérons un instant une marche linéairement renforcée par sommets restreinte à un segment de trois sommets que nous appellerons  $-1$ ,  $0$  et  $1$ .

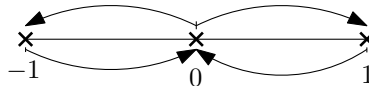


FIGURE 1.1

Au temps 0, la marche démarre en 0. Il est facile de voir qu'à tous les temps pairs, le marcheur se tient en 0. Le nombre de visites aux sommets  $-1$  et  $1$  se comporte comme le nombre de boules bleues et rouges d'une urne de Pólya. En effet, si on définit pour tout  $n \in \mathbb{N}$  le nombre de boules bleues (resp. rouges) par  $B_n := Z_n(-1) + 1$  (resp.



$R_n := Z_n(1) + 1$ ), alors la probabilité de tirer une boule bleue, par exemple, au temps  $n$  est  $B_n/(B_n + R_n)$ , qui n'est autre que la proportion de boules bleues. Il est alors connu que la proportion de boules bleues (et donc celle de boules rouges) converge vers une variable aléatoire de loi bêta de paramètres  $B_0$  et  $R_0$ , autrement dit vers un réel strictement compris entre 0 et 1.

Nous disposons de plusieurs outils pour démontrer un tel résultat : les techniques de martingales en sont un. Celles-ci consistent à trouver des (sur/sous-) martingales judicieuses qui permettent, grâce aux théorèmes de convergence classiques, de conclure la convergence des processus qui nous intéressent.

Par exemple, pour les urnes de Pólya, on peut démontrer, de façon très concise, que la proportion de boules bleues converge vers un réel strictement compris entre 0 et 1, grâce à une preuve due à Volkov. Le principe est de montrer que le processus défini par  $U_n := \ln(B_n + R_n) - \ln(R_n - 1)$  est une sur-martingale positive et donc converge, puis de répéter ce raisonnement en inversant  $B$  et  $R$ .

Les algorithmes stochastiques, dont nous parlerons plus loin, sont une autre méthode efficace pour étudier le renforcement. Ils furent d'abord utilisés par Pemantle [58, 59], Benaïm [12], puis également par Tarrès, [83].

Toutes ces méthodes furent utilisées par Tarrès dans [83] afin de prouver la localisation p.s. sur 5 points de la marche linéairement renforcée par sommets sur  $\mathbb{Z}$ . Cette preuve est élaborée et utilise des arguments complexes.

Dans ce qui suit, nous allons présenter certains arguments d'une preuve alternative qui fut également proposée par Tarrès [84], en 2011. Cette nouvelle preuve est non seulement plus courte et plus simple mais elle utilise surtout une méthode qui s'avère très utile pour étudier les processus de renforcement : une variante de la construction de Rubin.

## La variante de la construction de Rubin et sa généralisation

La construction de Rubin, ou *time-line construction*, fut d'abord utilisée par Davis [24] pour les modèles d'urnes, et par Sellke [69] pour le renforcement par arêtes. Pierre Tarrès en proposa une variante [84] afin de l'utiliser dans le cas des marches linéairement renforcées par sommets. Cette variante permet de mettre en place des couplages particulièrement utiles et solides. L'idée générale de la construction de Rubin est de coupler une marche renforcée à temps discret avec une marche à temps continu.

Un des aspects utiles est que cette variante a été définie pour toutes les marches renforcées par sommets avec une fonction de poids  $w$  croissante et strictement positive. Ainsi, Basdevant, Schapira et Singh ont utilisé cette construction dans leur article [4]. Dans leurs travaux, ils mettent en évidence une transition de phase pour les fonctions de poids sur-linéaires vérifiant (1.5).

## CHAPITRE 1. INTRODUCTION

---

**Théorème 1.9** (Basdevant, Schapira et Singh, [4]). *Soit  $X$  une marche aléatoire renforcée par sommets avec fonction de poids  $w$ , définie par la dynamique (1.4), et où  $w$  est une fonction croissante et strictement positive, vérifiant (1.5). Si  $w$  croît plus vite que  $n \log \log n$ , alors la marche se localise sur 4 sommets. Si  $w$  croît exactement à ce taux, alors  $X$  se localise sur 4 ou 5 points, et les deux événements ont lieu avec probabilité strictement positive. Enfin, si  $w$  croît plus lentement que  $n \log \log n$  alors  $X$  ne peut pas se localiser sur moins de 5 points.*

Cette constuction est également un des éléments centraux de la preuve de la localisation des *Stuck Walks* [46] pour laquelle on a dû l'étendre à une plus grande classe de processus : en particulier, la fonction de poids n'a plus à être croissante. Nous préciserons cela dans la prochaine sous-section.

Nous allons présenter la construction de Rubin dans un cadre assez large : sa définition ne dépend pas du contexte dans lequel on veut l'utiliser.

Définissons la construction de Rubin. Nous allons coupler une marche à temps discret avec des *lignes de temps continues* qui correspondent à des suites d'horloges exponentielles. Fixons  $w$  une fonction réelle croissante et strictement positive. Fixons une collection de réels strictement positifs :

$$\xi := (\xi_k^\pm(y), y \in \mathbb{Z}, k \geq 0) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}.$$

Ces réels seront plus tard définis comme des variables aléatoires exponentielles. Appelons  $\mathcal{M}$  la fonction qui, à une collection de réels strictement positifs  $\xi$ , associe une marche à temps continu  $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_t)_{t \in \mathbb{R}_+} := \mathcal{M}(\xi)$  sur  $\mathbb{Z}$ , construite comme suit.

Pour tout  $y \in \mathbb{Z}$  et  $k \in \mathbb{N}$ , la valeur de  $\xi_k^+(y)$  (resp.  $\xi_k^-(y)$ ) sera reliée à la durée d'une horloge attachée à l'arête orientée  $(y, y+1)$  (resp.  $(y, y-1)$ ). Conditionnellement à  $\xi$ , l'évolution est déterministe et définie par la procédure itérative suivante. Tout d'abord :

- Fixons  $\widetilde{X}_0 = 0$  et attachons deux horloges aux arêtes orientées  $(0, -1)$  et  $(0, 1)$  sonnant respectivement aux temps  $\xi_0^-(0)/w(0)$  et  $\xi_0^+(0)/w(0)$ .
- Au temps  $\tau_1 := (\xi_0^-(0)/w(0)) \wedge (\xi_0^+(0)/w(0))$ , une des alarmes sonne et s'arrête. Le marcheur traverse alors l'arête qui correspond à l'horloge qui a sonné, ce qui fixe  $\widetilde{X}_{\tau_1} = 1$  ou  $-1$ , selon l'horloge qui a sonné. L'une des horloges n'a pas sonné, on la met simplement en pause.

Notons que si les deux horloges sonnent simultanément, alors la construction échoue : ceci n'arrive p.s. jamais dans le cas d'horloges exponentielles.

Maintenant, supposons que nous avons construit  $\widetilde{X}$  jusqu'au temps  $t > 0$ , temps auquel le processus réalise un saut vers la droite, de  $y-1$  à  $y$ , pour un certain sommet  $y \in \mathbb{Z}$ . Soit  $k$  le nombre de sauts de  $y$  à  $y-1$  et soit  $n$  le nombre de visites à  $y-1$  avant le temps  $t$ . Nous poursuivons la procédure :

- Faisons démarrer une nouvelle horloge attachée à l'arête orientée  $(y, y - 1)$ , qui sonnera après la durée  $\xi_k^-(y)/w(n)$ .
- Si la marche a déjà été en  $y$  auparavant, on redémarre l'horloge attachée à l'arête orientée  $(y, y + 1)$  qui fut mise en pause la dernière fois où l'on a quitté  $y$ . Sinon, on démarre une nouvelle horloge attachée à  $(y, y + 1)$  qui sonnera après la durée  $\xi_0^+(y)/w(0)$ .
- Quand une des alarmes sonne, le marcheur traverse instantanément l'arête correspondante, et on arrête les deux horloges.

Enfin, on suit la procédure symétrique lorsque le processus saute de  $y + 1$  à  $y$ .

Nous avons donc construit une nouvelle marche à temps continu. Si l'on choisit judicieusement la loi des variables aléatoires  $\xi$ , alors on pourra retrouver la loi d'une marche renforcée par sommets, avec fonction de poids  $w$ .

Dans ce but, rappelons deux simples faits sur les variables exponentielles. Soient  $U$  et  $V$  deux variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètres respectifs  $u$  et  $v$ . Premièrement, on a  $\mathbb{P}(U = V) = 0$ , ce qui nous assurera que la construction n'échoue pas. D'autre part, on peut exprimer la probabilité que  $U$  sonne avant  $V$  :

$$\mathbb{P}(U < V) = \frac{u}{u + v}.$$

Rappelons également que le paramètre d'une exponentielle n'est autre que l'inverse de son espérance, de sorte que  $\mathbb{E}(U) = 1/u$ . Enfin, pour tout réel strictement positif  $a$ ,  $aU$  est une variable aléatoire exponentielle de paramètre  $u/a$ .

Adoptons naturellement les notations  $\tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{Z}_t(y)$  héritées de  $\mathcal{F}_k, Z_k(y)$ . Définissons  $\tau_0 := 0$  et  $\tau_k$  le moment du  $k$ -ième saut de  $\tilde{X}$ . Nous pouvons alors définir le processus à temps discret  $(\tilde{X}_{\tau_k})_k$ , qui correspond au processus à temps continu  $\tilde{X}$  pris aux temps de sauts.

Pour les marches renforcées, il suffit de remarquer que si l'on définit les variables  $\xi_k^\pm(y)$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $y \in \mathbb{Z}$ , comme des variables aléatoires exponentielles de paramètre 1, indépendantes les unes des autres, alors

$$\mathbb{P}(\tilde{X}_{\tau_{k+1}} = \tilde{X}_{\tau_k} \pm 1 | \tilde{\mathcal{F}}_{\tau_k}) = \frac{w(\tilde{Z}_{\tau_k}(\tilde{X}_{\tau_k} \pm 1))}{w(\tilde{Z}_{\tau_k}(\tilde{X}_{\tau_k} + 1)) + w(\tilde{Z}_{\tau_k}(\tilde{X}_{\tau_k} - 1))}.$$

En se rappelant la définition (1.4) des marches renforcées, ce résultat permet de conclure :

**Proposition 1.10** (Tarrès, [84]). *Soit  $X$  une marche aléatoire renforcée, avec une fonction de poids  $w$  croissante et strictement positive. Soit  $\xi$  une collection telle que pour tout  $y \in \mathbb{Z}$  et  $k \in \mathbb{N}$ , les  $\xi_k^\pm(y)$  sont des variables aléatoires exponentielles de paramètre 1, indépendantes les unes des autres. Définissons la marche à temps continu  $\tilde{X} := \mathcal{M}(\xi)$  et ce même processus pris aux temps de sauts  $(\tilde{X}_{\tau_k})$ .*

## CHAPITRE 1. INTRODUCTION

---

Alors, avec probabilité 1, la construction de  $\widetilde{X}$  n'échoue pas. De plus,  $(\widetilde{X}_{\tau_k})_{k \geq 0}$  et  $(X_k)_{k \geq 0}$  ont la même distribution.

Cette dernière proposition nous donne donc le lien entre la construction de Rubin et une marche aléatoire renforcée, avec une fonction de poids croissante  $w$ .

Nous pouvons en fait obtenir le même genre de résultats pour des processus un peu plus généraux, dont les *Stuck Walks*, pour lesquels des fonctions de poids non-monotones interviennent. Pour cela, il suffit de remarquer que l'on peut choisir la loi des  $\xi_k^\pm(y)$  de manière un peu plus générale, du moment que celle-ci ne dépend que de  $y$ , “ $\pm$ ” et  $k$ , c'est-à-dire du sommet où l'on se trouve, de l'orientation de l'arête considérée et du nombre de fois où cette arête orientée a été traversée.

Ainsi, on peut également considérer une marche aléatoire définie par  $x_0 := 0$  et, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = X_k \pm 1 | \mathcal{F}_k) = \frac{\frac{w(Z_k(X_k \pm 1))}{f^\pm(X_k, N_k(X_k, X_k \pm 1))}}{\frac{w(Z_k(X_k - 1))}{f^-(X_k, N_k(X_k, X_k - 1))} + \frac{w(Z_k(X_k + 1))}{f^+(X_k, N_k(X_k, X_k + 1))}}, \quad (1.6)$$

où  $N_k(y, y \pm 1)$  est le nombre de fois où le marcheur a traversé l'arête orientée  $(y, y \pm 1)$  au temps  $k$ . D'autre part,  $f^+$  et  $f^-$  sont deux fonctions strictement positives, et  $w$  est une fonction croissante et strictement positive. Cette fois, en revanche,  $w/f^\pm$  n'est pas forcément une fonction croissante.

**Proposition 1.11** ([46]). *Soit  $X$  une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  définie par (1.6). Soit  $\xi$  une collection d'horloges telle que, pour tout  $y \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\xi_k^\pm(y)$  sont des horloges exponentielles de moyennes  $f^\pm(y, k)$ , indépendantes les unes des autres. Définissons la marche à temps continu  $\widetilde{X} := \mathcal{M}(\xi)$  et  $(\widetilde{X}_{\tau_k})$  ce même processus pris aux temps de sauts.*

Alors, avec probabilité 1, la construction de  $\widetilde{X}$  n'échoue pas. De plus,  $(\widetilde{X}_{\tau_k})_{k \geq 0}$  et  $(X_k)_{k \geq 0}$  ont la même distribution.

Nous verrons plus loin que l'on peut faire entrer les *Stuck Walks* dans la classe des processus définis par (1.6). Notons qu'en choisissant  $f^\pm \equiv 1$ , nous retombons sur le cas des marches renforcées.

Maintenant, nous allons mettre en évidence les fameuses *lignes de temps*. Revenons alors à la marche en temps continu définie par la construction de Rubin. Tout d'abord, définissons, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $y \in \mathbb{Z}$ ,  $\widetilde{N}_{\tau_k}(y, y \pm 1)$  le nombre de fois où le marcheur a sauté de  $y$  à  $y + 1$  au temps  $\tau_k$ .

Pour tout  $y \in \mathbb{Z}$ , soit  $T_y^\pm$  la totalité du temps consommé par les horloges attachées à l'arête orientée  $(y, y \pm 1)$  :

$$T_y^\pm := \sum_{k \geq 0} \mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_{\tau_k} = y, \widetilde{X}_{\tau_{k+1}} = y \pm 1\}} \frac{\xi_{\widetilde{N}_{\tau_k}(y, y \pm 1)}^\pm(y)}{w(\widetilde{Z}_{\tau_k}(y \pm 1))}. \quad (1.7)$$

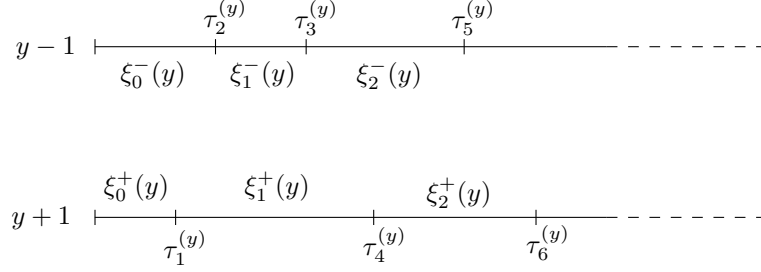


FIGURE 1.2 – Lignes de temps autour d'un sommet  $y$ . Les temps  $\tau_k^{(y)}$  représentent les temps des sauts partant de  $y$

Ainsi, autour de chaque sommet  $y$ , on retrouve deux lignes de temps (voir Figure 1.2), sur lesquelles on peut marquer les différents moments de sauts.

Par cette construction, il devient clair que si l'on visite infiniment souvent  $y - 1$ ,  $y$  et  $y + 1$ , et si l'une des deux lignes  $T_y^-$  ou  $T_y^+$  est finie, alors l'autre doit non seulement être finie mais également de longueur égale. En effet, comme il a été remarqué par Tarrès [84],

$$\{\tilde{Z}_\infty(y - 1) = \infty\} \cap \{\tilde{Z}_\infty(y + 1) = \infty\} \cap \{T_y^+ \wedge T_y^- < \infty\} \subset \{T_y^+ = T_y^- < \infty\}. \quad (1.8)$$

Si par exemple  $T_y^- < T_y^+$ , alors, après un certain temps, le marcheur sauterait une infinité de fois de  $y$  sur  $y - 1$  avant de faire un saut de plus de  $y$  sur  $y + 1$ , ce qui contredirait le fait qu'il visite  $y + 1$  infiniment souvent.

Nous avons déjà rappelé que deux variables exponentielles indépendantes sont égales avec probabilité nulle. On aimerait pouvoir en dire autant pour  $T_y^+$  et  $T_y^-$ . Malheureusement, ces deux quantités ne sont pas indépendantes. Mais il y a encore ici un résultat dû à Tarrès [84] qui nous permet de *remplacer* l'indépendance par un *argument de monotonie*. Cet argument nous permet de comparer les positions de deux marches à temps continu  $\tilde{X}_1$  et  $\tilde{X}_2$ , définies comme dans la construction de Rubin. Intuitivement, il s'agit de montrer que si la marche  $\tilde{X}_1$  est, au départ, à gauche de  $\tilde{X}_2$ , alors elle y restera toujours.

**Proposition 1.12** (Tarrès, [84]). *Si  $\tilde{X}$  est un processus à temps continu défini comme dans la Proposition 1.10, alors, pour tout  $y \in \mathbb{Z}$ ,*

$$\mathbb{P}(T_y^+ = T_y^- < \infty, \tilde{Z}_\infty(y - 1) = \tilde{Z}_\infty(y + 1) = \infty) = 0.$$

Ce résultat fut donc initialement énoncé pour des horloges exponentielles de paramètre 1 (le cas des marches renforcées) mais la preuve reste totalement valable pour des horloges exponentielles plus générales, définies comme dans la Proposition 1.11.

Ainsi, sur l'événement  $\{\tilde{Z}_\infty(y - 1) = \tilde{Z}_\infty(y + 1) = \infty\}$ , si l'on arrive à prouver que  $T_y^-$  ou  $T_y^+$  est fini, alors le marcheur restera bloqué, après un certain temps, à droite ou

## CHAPITRE 1. INTRODUCTION

---

à gauche de  $y$ , ce qui constitue une contradiction. Mieux encore, par des arguments de martingales, il suffit d'obtenir la convergence de l'espérance de  $T_y^\pm$ . Ainsi, en utilisant la construction de Rubin pour un processus défini comme dans (1.6), on peut obtenir, p.s. sur l'événement  $\{\tilde{Z}_\infty(y-1) = \tilde{Z}_\infty(y+1) = \infty\}$ ,

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{\tilde{X}_{\tau_k}=y, \tilde{X}_{\tau_{k+1}}=y-1\}} \frac{f^-(\tilde{X}_{\tau_k}, \tilde{N}_{\tau_k}(y, y-1))}{w(\tilde{Z}_{\tau_k}(y-1))} < \infty \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{\tilde{X}_{\tau_k}=y, \tilde{X}_{\tau_{k+1}}=y+1\}} \frac{f^+(\tilde{X}_{\tau_k}, \tilde{N}_{\tau_k}(y, y+1))}{w(\tilde{Z}_{\tau_k}(y+1))} < \infty \right\} \\ &= \{\tilde{Z}_\infty(y-1) < \infty\} \cup \{\tilde{Z}_\infty(y+1) < \infty\}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Ce raisonnement constitue donc un élément important de la preuve alternative proposée dans [84], et de la preuve de la localisation des *Stuck Walks* proposée dans [46], ce qui nous intéresse ici.

### 1.2 *Stuck Walks* : une conjecture d'Erschler, Tóth et Werner

L'objectif de cette sous-section est de présenter nos résultats [46] sur les marches aléatoires inter-agissantes définies par Erschler, Tóth et Werner [38], qui ont proposé une conjecture que nous avons en partie démontré. Nous appellerons ces marches les *Stuck Walks*, bien que ce terme désigne plus un comportement qu'un processus particulier.

Les *Stuck Walks* sont une classe de marches aléatoires inter-agissantes pour lesquelles se mêlent répulsion à courte distance et attraction à plus grande distance. Nous allons prouver que l'attraction peut prendre le dessus et entraîner la localisation de la marche sur un intervalle de taille arbitrairement grande, dépendant de la valeur d'un certain paramètre.

Nous allons commencer par définir le modèle, dans un cadre plus général. Puis nous énoncerons les premiers résultats obtenus dans [38] et nos résultats, présentés dans [46]. Enfin, nous donnerons les grandes lignes de la preuve de ces résultats qui repose d'une part sur l'analyse d'un certain système linéaire, mis en évidence dans [38], et d'autre part sur la généralisation de la variante de la construction de Rubin présentée dans la section précédente.

#### Définition et premiers résultats

Nous allons ici définir un modèle plus général que les *Stuck Walks*, qui fut également proposé par Erschler, Tóth et Werner [37, 38].

Soit  $X := (X_n)_{n \geq 0}$  une marche au plus proche voisin sur la droite des entiers  $\mathbb{Z}$ , à temps discret. Soit  $l_k(j)$  le temps local sur l'arête non-orientée  $\{j-1, j\}$  au temps  $k$  :

$$l_k(j) = \sum_{m=1}^k \mathbb{1}_{\{X_{m-1}, X_m\} = \{j-1, j\}}. \quad (1.10)$$

Cette quantité correspond simplement au nombre de fois où l'on a traversé l'arête  $\{j-1, j\}$ , sans tenir compte du sens.

Soit  $(\mathcal{F}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la filtration engendrée par le processus, où  $\mathcal{F}_k = \sigma(X_0, \dots, X_k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Fixons un paramètre réel  $\alpha$  et définissons, pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , la combinaison linéaire suivante qui dépend des temps locaux sur les arêtes voisines de  $j$ , et sur les arêtes voisines de ces dernières :

$$\Delta_k(j) = -\alpha l_k(j-1) + l_k(j) - l_k(j+1) + \alpha l_k(j+2), \quad (1.11)$$

et, par un léger abus de notation,

$$\Delta_k := \Delta_k(X_k).$$

Fixons un autre paramètre réel  $\beta > 0$ . Nous allons alors considérer la marche définie dans [37, 38] par  $X_0 = 0$  et la probabilité de transition conditionnelle :

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = X_k \pm 1 | \mathcal{F}_k) = \frac{e^{\pm \beta \Delta_k}}{e^{-\beta \Delta_k} + e^{\beta \Delta_k}}. \quad (1.12)$$

Nous appellerons  $\Delta_k$  le *courant local* ressenti par le marcheur au temps  $k$ . En effet, lorsque ce courant est positif (resp. négatif), le marcheur aura plutôt tendance à sauter vers la droite (resp. gauche), ce qui justifie ce vocabulaire. Comme nous le verrons plus loin, la valeur de  $\beta$  n'est pas déterminante pour le comportement de la marche. En revanche, la valeur de  $\alpha$  est cruciale.

Etudions rapidement la dynamique. Supposons que le marcheur se tienne sur un certain sommet  $j$  au temps  $k$ . Alors, le nombre de fois où le marcheur a traversé l'arête  $\{j-1, j\}$  fait croître le courant local  $\Delta_k$ . Ainsi, plus le marcheur a traversé  $\{j-1, j\}$ , plus il aura tendance à sauter vers la droite (côté opposé à l'arête). Le phénomène symétrique a lieu pour l'arête  $\{j, j+1\}$ . Ainsi, on dit que le marcheur est *repoussé* par ses arêtes voisines.

Supposons quelques instants que  $\alpha > 0$  (ce qui sera le cas pour les *Stuck Walks*). Alors, le nombre de fois où le marcheur a traversé l'arête  $\{j-2, j-1\}$  fait décroître le courant local  $\Delta_k$ . Ainsi, plus le marcheur a traversé  $\{j-2, j-1\}$ , plus il aura tendance à sauter vers la gauche (vers cette arête). Le phénomène symétrique a lieu pour l'arête  $\{j+1, j+2\}$ . Ainsi, on dit que le marcheur est *attiré* par les arêtes voisines de ses

## CHAPITRE 1. INTRODUCTION

---

voisines. On peut ainsi voir apparaître une compétition entre attraction et répulsion.

Ce modèle peut être vu comme une généralisation de la "vraie" marche auto-répulsive, ou *true self-repelling walk* (TSRW) en dimension 1. En effet, en choisissant  $\alpha = 0$ , on retrouve la loi d'un TSRW avec répulsion par arête. Dans ce cas, Tóth [85] a prouvé en 1995 une limite d'échelle non-dégénérée et non-gaussienne pour  $X_k/k^{2/3}$ .

Si  $\alpha = -1$ , on retrouve le TSRW avec répulsion par sites, pour lequel le même comportement est conjecturé (voir [1, 87]). Le lecteur pourrait par ailleurs être intéressé par la version continue de ce processus, voir [28, 29, 89].

Lorsque  $\alpha \in [-1, 1/3[$ , on considère que  $\alpha$  est petit et que la marche correspondante est un TSRW perturbé : on s'attend alors à un comportement similaire à celui d'un TSRW avec répulsion par arêtes.

Le cas correspondant à la valeur critique  $\alpha = 1/3$  est un plus mystérieux et l'on s'attend plutôt à une échelle du type  $k^{2/5}$ .

Si  $\alpha < -1$ , on est dans un cas où le marcheur est repoussé par ses arêtes voisines et encore plus fortement repoussé par les arêtes voisines de ses voisines. Il est alors conjecturé que la marche est ralentie. Ceci serait dû à la création de pièges par la marche. Nous renvoyons le lecteur à [37] qui passe en revue de façon détaillée ces différents cas.

Ici, comme dans [38, 46], on se concentrera sur le cas  $\alpha > 1/3$ , pour lequel il y a une compétition entre la répulsion des arêtes voisines et l'attraction des arêtes voisines des voisines.

### Résultats

Nous avons besoin de définir une partition de  $(1/3, +\infty)$  dont les sous-intervalles vont correspondre, comme nous le verrons, aux différents comportements que la marche peut adopter selon la valeur du paramètre  $\alpha$ .

Soit  $(\alpha_L)_{L \geq 1}$  une suite définie par  $\alpha_1 = +\infty$  et, pour tout  $L \geq 2$ ,

$$\alpha_L = \frac{1}{1 + 2 \cos(\frac{2\pi}{L+2})}. \quad (1.13)$$

La forme explicite de  $(\alpha_L)_{L \geq 1}$  est pour l'instant mystérieuse, elle est en fait issue du système linéaire dont nous parlerons plus loin. Le plus important est, pour le moment, de remarquer que cette suite décroît de  $+\infty$  à  $1/3$ .

Nous allons utiliser certaines notations de la Section 1.1. On définit, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $j \in \mathbb{Z}$ , le nombre de visites au site  $j$  au temps  $k$ ,

$$Z_k(j) = \sum_{m=1}^k \mathbb{1}_{\{X_m=j\}} = \frac{l_k(j) + l_k(j+1) + \mathbb{1}_{\{X_k=j\}} - \mathbb{1}_{\{j=0\}}}{2},$$

où  $l_k(j)$  est défini en (1.10).



Soit  $R$  (resp.  $R'$ ) l'ensemble des points visités au moins une fois (resp. infiniment souvent), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} R &= \{j \in \mathbb{Z} : Z_\infty(j) > 0\}, \\ R' &= \{j \in \mathbb{Z} : Z_\infty(j) = \infty\}. \end{aligned}$$

Dans [38], les auteurs ont prouvé le résultat suivant.

**Théorème 1.13** (Erschler, Tóth et Werner, [38]). *Soit  $L \geq 1$  un entier. Nous avons :*

- *Si  $\alpha < \alpha_L$ , alors, presque sûrement,  $|R'| \geq L + 2$ , ou  $R' = \emptyset$  ;*
- *Si  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$ , alors la probabilité pour que  $|R'| = L + 2$  est strictement positive.*

*De plus, il existe un vecteur réel déterministe  $(l_1, \dots, l_{L+1})$ , tel que, sur l'événement  $\{R' = \{x, x+1, \dots, x+L+1\}\}$ , nous avons presque sûrement la loi des grands nombres suivante :*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} (l_k(x+1), \dots, l_k(x+L+1)) = (l_1, \dots, l_{L+1}).$$

Ajoutons également que les auteurs donnent la forme explicite du vecteur limite dont il est question dans ce dernier théorème. Le profil asymptotique des temps locaux sur l'intervalle de localisation est donc déterministe, contrairement au cas des marches aléatoires linéairement renforcées où il est aléatoire.

Erschler, Tóth et Werner proposent également la conjecture suivante.

**Conjecture 1.14** (Erschler, Tóth et Werner, [38]). *Si  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$ , alors  $|R'| = L + 2$  presque sûrement.*

Dans [46], nous avons prouvé le résultat suivant, qui établit partiellement la conjecture.

**Théorème 1.15.** *Si  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$ , alors la marche se localise sur  $L + 2$  ou  $L + 3$  sites presque sûrement, c'est-à-dire  $|R'| \in \{L + 2, L + 3\}$  p.s.*

Dans les deux cas, nous donnons aussi les profils asymptotiques des temps locaux qui sont en accord avec ceux présentés dans [38]. Quand  $\alpha > 1$ , c'est-à-dire  $\alpha \in (\alpha_2, \alpha_1)$ , nous pouvons améliorer ce résultat et prouver la totalité de la conjecture dans ce cas.

**Théorème 1.16.** *Si  $\alpha \in (1, +\infty)$ , alors la marche se localise sur exactement 3 sites presque sûrement, c'est-à-dire  $|R'| = 3$  p.s.*

Rappelons que l'on connaît des exemples de marches aléatoires renforcées pour lesquelles l'ensemble de localisation a une taille aléatoire qui peut prendre deux valeurs différentes, chacune avec probabilité positive (voir Théorème 1.9). Il est donc légitime de se demander si les *Stuck Walks* peuvent se comporter ainsi. Mais, dans le cas général  $\alpha > 1/3$ , nous avons de bonnes raisons de croire que la conjecture est vérifiée et que

## CHAPITRE 1. INTRODUCTION

---

$|R'| = L + 3$  ne se produit jamais car c'est un comportement limite qui paraît instable, et qui nécessiterait une forte rigidité du processus. On aimerait donc pouvoir prouver que, une fois la marche confinée à  $L + 3$  points, le marcheur arrête de visiter l'un des sommets qui se trouvent aux bords, après un certain temps.

Notons que ces résultats prouvent qu'il s'agit d'un modèle de marches aléatoires qui se localisent, selon la valeur d'un paramètre, sur des intervalles arbitrairement grands. Le même genre de phénomène avait été énoncé avec probabilité positive par Basdevant, Schapira et Singh [3] pour des marches renforcées avec une fonction de poids sous-linéaire.

Dans la section suivante, nous allons expliquer les grandes lignes de la preuve du Théorème 1.15.

### Résumé de la preuve du Théorème 1.15

Nous allons, dans cette section, rapidement présenter deux des arguments centraux dans la preuve du Théorème 1.15. Nous admettrons tous les résultats intermédiaires, prouvés dans [46], transcrit en Chapitre 2.

Pour commencer, nous admettons le résultat suivant qui établit que le marcheur ne visite qu'un nombre fini de sommets.

**Proposition 1.17.** *La marche visite presque sûrement un nombre fini de sites, c'est-à-dire  $|R| < +\infty$  p.s.*

La preuve de cette Proposition est dans le même esprit que ce qui suit. Pour le reste de la section, fixons un entier  $L \geq 1$ , et fixons un réel  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$ . On sait que la marche se localise, par la Proposition 1.17. De plus, dans [38], il est prouvé que p.s. la marche ne peut pas se localiser sur moins de  $L + 2$  sites. Il nous reste donc à prouver que la marche se localise p.s. sur moins de  $L + 3$  points.

Pour cela, nous allons tout d'abord reprendre la stratégie proposée par Erschler, Tóth et Werner dans [38] qui consiste à comparer les temps locaux asymptotiques aux solutions d'un système linéaire.

Nous avons besoin du résultat suivant qui établit que les courants locaux renormalisés des sommets à l'intérieur de l'intervalle de localisation convergent vers 0. Ici, par *intérieur*, on entend tous les sommets de l'intervalle sauf les deux qui sont aux extrémités.

**Proposition 1.18.** *Soient  $x \in \mathbb{Z}$  et  $K \in \mathbb{N}$ . Presque sûrement, on a :*

$$\{R' = \{x, \dots, x + K + 1\}\} \subset \bigcap_{j=x+1}^{x+K} \left\{ \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\Delta_k(j)}{k} = 0 \right\}.$$

Il s'agit en quelque sorte d'une généralisation d'un énoncé de [38], qui nous donnerait ce résultat seulement lorsque  $K \leq L$ , ce qui ne nous suffit pas. La Proposition 1.18 nécessite une preuve technique, qui utilise ce qui suit.

La Proposition 1.18 nous permet d'affirmer que, sur l'événement  $\{R' = \{x, \dots, x + K + 1\}\}$  avec  $K \in \mathbb{N}$ , les temps locaux renormalisés  $(l_k(x), \dots, l_k(x + K + 2))/k$  approchent asymptotiquement l'ensemble des solutions  $(l_0, \dots, l_{K+2})$  du système linéaire défini par :

$$d_1 = d_2 = \dots = d_K = 0, \quad l_0 = l_{K+2} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{K+1} l_j = 1, \quad (1.14)$$

où, pour tout  $j \in \{1, \dots, K\}$ ,  $d_j = -\alpha l_{j-1} + l_j - l_{j+1} + \alpha l_{j+2}$ .

Ce point est un élément clé de la preuve. En effet, en étudiant le système, on pourra obtenir des informations sur le comportement asymptotique des temps locaux.

Ce système linéaire est en fait une partie d'une suite de Fibonacci bi-infinie, plus précisément une suite récurrente linéaire d'ordre 3. On peut alors l'étudier avec des méthodes semblables à celle de l'étude des équations différentielles.

Rappelons que nous avons fixé un entier  $L \geq 1$  et un paramètre  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$ . Nous allons décrire les solutions du système (1.14), selon la valeur de l'entier  $K$ . Par extension de la définition des  $d_j$ , on définit  $d_0 = -l_1 + \alpha l_2$  et  $d_{K+1} = -\alpha l_K + l_{K+1}$ , qui correspondent alors aux courants locaux renormalisés sur les bords de l'intervalle de localisation. On a alors :

- Si  $K < L$ , alors (1.14) admet une unique solution, avec  $l_j > 0$  pour tout  $j \in \{1, \dots, K + 1\}$ . De plus,  $d_0 < 0$  et  $d_{K+1} > 0$ .
- Si  $K = L$ , ou si  $K = L + 1$ , alors (1.14) admet une unique solution, avec  $l_j > 0$  pour tout  $j \in \{1, \dots, K + 1\}$ . Mais, cette fois,  $d_0 > 0$  et  $d_{K+1} < 0$ .
- Si  $K > L + 1$ , alors la solution n'est plus nécessairement unique, les  $l_j$  ne sont pas forcément tous strictement positifs, et il n'est pas évident d'attribuer un signe à  $d_0$  ou  $d_{K+1}$ .

Le premier point nous permet de comprendre qu'un intervalle de la forme  $\{x, \dots, x + K + 1\}$ , avec  $K < L$ , n'est pas un bon candidat pour l'intervalle de localisation. En effet, la Proposition 1.18 implique que, sur l'événement  $R' = \{x, \dots, x + K + 1\}$ , le courant local renormalisé  $\Delta_k(x)/k$  (resp.  $\Delta_k(x + K + 1)/k$ ) converge vers  $d_0 < 0$  (resp.  $d_{K+1} > 0$ ). Ainsi, le marcheur, lorsqu'il est sur les bords, est fortement poussé vers l'extérieur de l'intervalle et finira par en sortir. Ainsi, l'intervalle de localisation comprend au moins  $L + 2$  sommets.

De manière équivalente, le deuxième point implique que  $L + 2$  et  $L + 3$  sont deux bons candidats pour la taille de l'intervalle de localisation. En effet, dans ces deux cas, les courants locaux sur les bords *retiennent* le marcheur à l'intérieur de l'intervalle.

## CHAPITRE 1. INTRODUCTION

---

En ce qui concerne le troisième point, nous avons donc besoin de plus de résultats. Le lemme suivant s'intéresse aux solutions positives du système linéaire : ceci est acceptable car nous voulons comparer ces solutions aux temps locaux qui, eux, sont positifs.

**Lemme 1.19.** *Soient  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$  et  $K \geq L$ . Si  $(l_0, \dots, l_{K+2})$  est une solution de (1.14) telle que  $l_1, \dots, l_{K+1} \geq 0$ , alors :*

(i)  $d_0 \geq c(K)$  et  $d_{K+1} \leq -c(K)$ , où  $c(K)$  est une constante strictement positive qui dépend seulement de  $\alpha$  et de  $K$ .

(ii) pour la même constante  $c(K)$ , on a

$$l_{L+2} - \alpha l_{L+1} \leq -c(K).$$

L'affirmation (i) est utile pour la démonstration de la Proposition 1.18 tandis que (ii), associée à la Proposition 1.18, nous sert à déduire la convergence d'une certaine série.

**Lemme 1.20.** *Soient  $x, K \in \mathbb{Z}$  tels que  $K \geq L$ . Alors, presque sûrement,*

$$\{R' = \{x, x+1, \dots, x+K+1\}\} \subset \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} e^{2\beta[l_k(x+L+2) - \alpha l_k(x+L+1)]} < +\infty \right\}. \quad (1.15)$$

Pour comprendre ce résultat, il suffit de remarquer que, dans les conditions du Lemme 1.20,  $(l_k(x+L+2) - \alpha l_k(x+L+1))/k < -c(K)/2$  lorsque  $k$  est assez grand.

Le Lemme 1.20 justifie toute l'étude du système linéaire, et il va nous permettre d'utiliser la construction de Rubin, présentée en Section 1.1. En effet, la série convergente (1.15) va être vu comme la longueur moyenne d'une ligne de temps, afin d'appliquer (1.9).

On va réécrire la probabilité de transition (1.12) sous la forme (1.6) afin de pouvoir utiliser les résultats de la Section 1.1.

Tout d'abord, il faut remarquer que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{k+1} = X_k - 1 | \mathcal{F}_k) &= \frac{e^{-\beta \Delta_k}}{e^{-\beta \Delta_k} + e^{\beta \Delta_k}} \\ &= \frac{e^{2\beta[-l_k(X_k) + \alpha l_k(X_k - 1)]}}{e^{2\beta[-l_k(X_k) + \alpha l_k(X_k - 1)]} + e^{2\beta[-l_k(X_k + 1) + \alpha l_k(X_k + 2)]}}. \end{aligned}$$

Afin d'écrire cette probabilité sous une autre forme, définissons, pour tout  $y \in \mathbb{Z}$  et tout  $k \in \mathbb{N}$ , le nombre de fois où l'arête *orientée*  $(y, y \pm 1)$  a été traversée au temps  $k$  :

$$N_k(y, y \pm 1) = \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{1}_{\{X_n = y, X_{n+1} = y \pm 1\}},$$

et notons que si  $X_k = y$  alors on a :

$$\begin{aligned} Z_k(y \pm 1) &= \frac{l_k(y + \frac{1 \pm 1}{2}) + l_k(y + \frac{1 \pm 3}{2}) - \mathbb{1}_{\{y \pm 1 = 0\}}}{2}, \\ N_k(y, y \pm 1) &= \frac{l_k(y + \frac{1 \pm 1}{2}) - \mathbb{1}_{\{\pm y < 0\}}}{2}. \end{aligned}$$

Soient  $f^+$  et  $f^-$  deux fonctions de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ , et  $w$  une fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ , telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $y \in \mathbb{Z}$ ,

$$f^\pm(y, n) = \exp \left( 2\beta \left[ 2(1 + \alpha)n - \alpha \mathbb{1}_{\{y \pm 1 = 0\}} + (1 + \alpha) \mathbb{1}_{\{\pm y < 0\}} \right] \right), \quad (1.16)$$

$$w(n) = \exp(2\beta \times 2\alpha \times n). \quad (1.17)$$

Alors, si  $X_k = y$ , on a :

$$e^{2\beta[-l_k(y+1)+\alpha l_k(y+2)]} = \frac{w(Z_k(y+1))}{f^+(y, N_k(y, y+1))}, \quad (1.18)$$

$$e^{2\beta[-l_k(y)+\alpha l_k(y-1)]} = \frac{w(Z_k(y-1))}{f^-(y, N_k(y, y-1))}, \quad (1.19)$$

ce qui nous donne finalement :

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = X_k \pm 1 | \mathcal{F}_k) = \frac{\frac{w(Z_k(X_k \pm 1))}{f^\pm(X_k, N_k(X_k, X_k \pm 1))}}{\frac{w(Z_k(X_k - 1))}{f^-(X_k, N_k(X_k, X_k - 1))} + \frac{w(Z_k(X_k + 1))}{f^+(X_k, N_k(X_k, X_k + 1))}},$$

et l'on retrouve donc l'écriture (1.6). On peut alors utiliser la construction de Rubin présentée en Section 1.1, en particulier la Proposition 1.11 et les inclusions (1.9).

En utilisant l'égalité (1.19) et le Lemme 1.20, avec  $y = x + L + 2$ , on peut déduire que, presque sûrement,

$$\{R' = \{x, \dots, x + K + 1\}\} \subset \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^-(x + L + 2, N_k(x + L + 2, x + L + 1))}{w(Z_k(x + L + 1))} < \infty \right\}.$$

Puis, par la construction de Rubin, en utilisant la Proposition 1.11, les inclusions (1.9), on obtient :

$$\{R' = \{x, \dots, x + K + 1\}\} \subset \{Z_\infty(x + L + 1) < +\infty\} \cup \{Z_\infty(x + L + 3) < +\infty\}.$$

Finalement, en prenant l'union sur  $x \in \mathbb{Z}$  et  $K \geq L + 2$ , on conclut :

$$\mathbb{P}(|R'| \geq L + 4) = 0.$$

Nous avons à présent une bonne idée de la preuve principale de [46]. Cet article est présenté en Chapitre 2.

### 2 Marches aléatoires en milieux aléatoires

Cette section adopte un point de vue différent de la Section 1. Les outils développés pour étudier les processus que nous allons présenter sont très différents de ceux utilisés pour les marches renforcées. Il s'agit des *marches aléatoires en milieux aléatoires* (MAMA). Elles furent définies en premier lieu par Chernov [21] comme un modèle jouet pour décrire la réplication de l'ADN.

La nature des interactions pour les MAMA est moins explicite que dans le cas des marches renforcées. Cependant, on peut souligner qu'un lien entre les marches renforcées par arêtes et les marches aléatoires dans un milieu de Dirichlet fut explicité par Enriquez et Sabot [33] en 2002. On peut intuitivement comprendre ce lien en se rappelant qu'une marche aléatoire renforcée par arêtes peut être exprimée à l'aide d'un ensemble d'urnes de Pólya, dont le comportement asymptotique est décrit par des lois de Dirichlet.

Dans le cas d'une marche aléatoire simple sur la grille  $\mathbb{Z}^d$ , le marcheur saute, à chaque unité de temps, vers un de ses  $2d$  voisins, ce dernier étant choisi uniformément.

Ici, l'environnement est donc fixé, déterministe. Une des questions naturelles est de savoir si un tel marcheur, qui part de 0, revient infiniment souvent en 0 ou bien s'il s'enfuit dans une certaine direction. Lorsque le marcheur revient infiniment souvent à son point de départ, on dit que la marche est *récurrente*. Si ce n'est pas le cas, alors le marcheur s'éloigne vers l'infini et la marche est dite *transiente*.

La réponse à cette question fut apportée par Pólya en 1921 qui a démontré qu'une marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}$  ou sur  $\mathbb{Z}^2$  est récurrente; en revanche, une marche sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 3$ , est transiente. Ainsi, *un homme ivre finira par rentrer chez lui alors qu'un poisson ivre peut se perdre à jamais...*

D'autre part, on peut ajouter une *dérive* (ou un *drift*) à une marche sur la droite en rendant la probabilité de sauter à droite sur chaque sommet strictement plus grande que celle de sauter à gauche. C'est-à-dire, si  $p$  est la probabilité de sauter à droite, on choisit  $p > 1 - p$ . Dans ce cas, la marche devient transiente et le marcheur a une *vitesse asymptotique* telle que  $X_n/n \rightarrow v = 2p - 1 > 0$ , où  $X_n$  est la position du marcheur au temps  $n$ . Le marcheur a donc une vitesse asymptotique strictement positive, et on dit alors que la marche est *ballistique*.

A présent, que se passe-t-il si l'environnement est rendu aléatoire? Autrement dit, que se passe-t-il dans le cas des marches aléatoires en milieux aléatoires? Ceci correspond au cadre dans lequel, pour chaque sommet, une variable aléatoire décrit la façon dont le marcheur se déplace lorsqu'il est sur ce sommet. Ces variables sont indépendantes et identiquement distribuées.

Nous pourrions, selon notre préférence, considérer que, lorsque l'on arrive sur un sommet pour la première fois, on tire alors la loi sur *ce* sommet, qui sera dès lors fixée,

ou bien considérer que l'on commence d'abord par tirer *tout* l'environnement puis que le marcheur se déplace sur celui-ci.

Le premier point de vue prend plutôt la perspective des processus inter-agissants, tandis que le second exploite le caractère markovien de l'environnement fixé.

Nous pouvons toujours nous demander si le marcheur revient infiniment souvent à son origine ou bien s'il s'enfuit dans une certaine direction. Dans le deuxième cas, à quelle vitesse avance le marcheur ?

Dans le cadre d'une marche aléatoire dans un environnement déterministe sur la droite, la marche est, comme nous venons de le voir, soit récurrente (marche simple), soit transiente dans une direction, avec une vitesse strictement positive (la dérive). En revanche, dans le cas des MAMA, nous allons voir, en Section 2.1, qu'en dimension 1 il existe des marches avec une transience directionnelle mais une vitesse nulle. Ceci est dû à des phénomènes de pièges qui ralentissent la marche.

Dans la Section 2.2, nous verrons que cela ne semble pas être toujours le cas en dimensions supérieures, et qu'il est en général pensé que, dans un environnement uniformément elliptique (voir (2.1)), si une marche est transiente dans une direction donnée alors elle a une vitesse asymptotique strictement positive. En particulier, nous présenterons la condition  $(T)$  de Sznitman [77]. Enfin, nous nous intéresserons en Section 2.3 aux marches non-uniformément elliptiques et nous présenterons des critères d'*ellipticité* pour la ballisticité issus de nos résultats, obtenus en collaboration avec A. Fribergh, qui améliorent ces critères d'ellipticité.

## 2.1 Introduction et critère de ballisticité en dimension 1

Nous allons ici définir les MAMA en dimension 1. Ce cas, très simple à définir, est également très intéressant car on peut entièrement caractériser la récurrence-transience, ainsi que la vitesse de la marche. Comme nous le verrons plus loin, ce n'est pas du tout le cas en dimensions supérieures.

### Définition et premiers résultats

Pour chaque sommet, la probabilité de sauter à droite lorsqu'on est sur ce site va être définie par une variable aléatoire. Il y a beaucoup de manières différentes de rendre ces probabilités aléatoires. Nous pouvons en citer au moins deux : l'aléa sur les arêtes et l'aléa sur les sommets.

L'aléa sur les arêtes consiste à se déplacer le long des arêtes selon une conductance aléatoire. Ceci rend en particulier la marche, conditionnée sur son environnement, réversible (voir [39]). Pour les MAMA, l'aléa est plutôt créé sur les sommets.

## CHAPITRE 1. INTRODUCTION

---

Définissons une famille de variables aléatoires  $\omega = (\omega_y)_{y \in \mathbb{Z}}$  indépendantes et identiquement distribuées, prenant valeurs dans  $[0, 1]$ . Pour chaque réalisation  $\omega$  de l'environnement, nous allons considérer la chaîne de Markov  $(X_n)_n$  sur  $\mathbb{Z}$  pour laquelle le marcheur saute, lorsqu'il est sur un sommet  $y \in \mathbb{Z}$ , sur  $y + 1$  avec probabilité  $\omega_y$  et sur  $y - 1$  avec probabilité  $1 - \omega_y$ .

Nous noterons  $P_x^\omega$ ,  $x \in \mathbb{Z}$ , la loi canonique de la chaîne de Markov sur  $\mathbb{Z}$ , partant de  $x$ , et dont les probabilités de transitions sont décrites par l'environnement  $\omega$ , c'est-à-dire telles que, pour tout  $y \in \mathbb{Z}$ ,

$$P_x^\omega(X_{n+1} = y + 1 | X_n = y) = \omega_y.$$

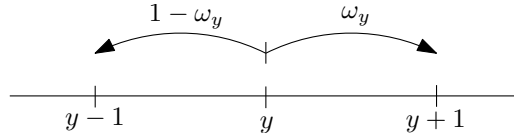


FIGURE 1.3

De plus, nous noterons  $\mathbf{P}$  la mesure de probabilité sur l'environnement, sous laquelle les coordonnées  $(\omega_y)_{y \in \mathbb{Z}}$  sont indépendantes et identiquement distribuées. On définit également, pour  $x \in \mathbb{Z}$ , la mesure  $\mathbb{P}_x = \int P_x^\omega d\mathbf{P}$ .

La loi  $P_x^\omega$  est appelée la loi *quenched*, et sous celle-ci l'environnement  $\omega$  est fixé.  $\mathbb{P}_x$  est appelée la loi *annealed* de la marche, pour laquelle on prend la moyenne de l'environnement. La loi *quenched* définit une chaîne de Markov, en revanche, la loi *annealed* n'est pas markovienne.

Le résultat suivant, dû à Solomon en 1965, donne des critères de transience et de récurrence, et décrit la vitesse du marcheur. Tout ceci est énoncé par le biais de la variable

$$\rho(x, \omega) = \frac{1 - \omega_x}{\omega_x}.$$

Nous adopterons la notation  $\rho = \rho(0, \omega)$ .

**Théorème 2.1** (Solomon [75]). *Nous sommes  $\mathbb{P}_0$ -p.s. dans un des cas suivants :*

- $\lim_n X_n = +\infty$  si  $\mathbb{E}(\log \rho) < 0$  ;
- $\lim_n X_n = -\infty$  si  $\mathbb{E}(\log \rho) > 0$  ;
- $\liminf_n X_n = -\infty$  et  $\limsup_n X_n = +\infty$  si  $\mathbb{E}(\log \rho) = 0$ .



De plus,  $\mathbb{P}_0$ -p.s., nous avons

$$\frac{X_n}{n} \longrightarrow v := \begin{cases} \frac{\mathbb{E}(\rho^{-1})-1}{\mathbb{E}(\rho^{-1})+1} < 0 & , \text{ si } \frac{1}{\mathbb{E}(\rho^{-1})} > 1; \\ 0 & , \text{ si } \frac{1}{\mathbb{E}(\rho^{-1})} \leq 1 \leq \mathbb{E}(\rho); \\ \frac{1-\mathbb{E}(\rho)}{1+\mathbb{E}(\rho)} > 0 & , \text{ si } \mathbb{E}(\rho) < 1. \end{cases}$$

Premièrement, ce théorème est très précis et donne de façon exhaustive et sous une forme simple les comportements que la marche peut adopter. Lorsque le marcheur a une vitesse limite non nulle, on dira que la marche est *ballistique*.

D'autre part, contrairement à ce que l'on pourrait croire intuitivement, la vitesse asymptotique n'est pas égale à la dérive  $\mathbb{E}(2w_0 - 1)$ . La méthode de l'environnement vu de la particule permet de prouver l'expression exacte de la vitesse asymptotique. Cette méthode est donc très efficace en dimension 1, en partie grâce au caractère réversible de la marche. En revanche, en dimension supérieure, la réversibilité disparaît et cette méthode n'a alors été que très peu explorée.

Enfin, ce résultat met en évidence qu'il peut y avoir des marches qui sont transientes dans une certaine direction mais qui ont une vitesse nulle. En effet, des pièges peuvent être créés par des effets de grandes déviations. C'est-à-dire qu'il s'agit d'événements *rare*s dont les conséquences sont importantes.

## Modèles de pièges et potentiel

Les pièges créés par l'environnement d'une MAMA peuvent avoir une grande conséquence et donner à la marche une vitesse asymptotique nulle.

Afin de mieux comprendre l'effet des pièges, nous allons définir un autre modèle : le modèle de pièges de Bouchaud. Nous verrons ensuite comment, à travers l'introduction d'un potentiel, on peut le relier aux MAMA en dimension 1.

Soit  $(\tau_x)_{x \in \mathbb{Z}}$  une collection de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Chacune des variables  $\tau_x$  représente la *force* d'un piège placé au sommet  $x$  : le marcheur, se tenant sur  $x$ , devra attendre, avant de pouvoir se déplacer, un temps exponentiel de moyenne  $\tau_x$ .

Nous allons nous intéresser à une marche  $(\widetilde{X}_t)_{t \geq 0}$  sur  $\mathbb{Z}$  à temps continu. Donnons à présent la définition d'un modèle de pièges de Bouchaud  $\beta$ -biaisé, avec  $\beta \in (1, \infty]$ . Le marcheur part de 0, soit  $\widetilde{X}_0 = 0$ , puis lorsque le marcheur arrive sur un sommet  $x \in \mathbb{Z}$ , il doit y rester un temps exponentiel de moyenne  $\tau_x$ , elle-même aléatoire, puis il saute à droite avec probabilité  $\beta/(1 + \beta)$  ou sur la gauche avec probabilité  $1/(1 + \beta)$ .

On appelle modèle de pièges de Bouchaud *totalement dirigé* le modèle  $\beta$ -biaisé avec  $\beta = +\infty$ . Dans ce cas, le marcheur saute toujours vers la droite.

Considérons le cas totalement dirigé. Il est évident que cette marche est transiente vers la droite. Supposons que  $\tau_0$  a une queue de la forme  $\mathbb{P}(\tau_0 \geq t) = t^{-\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 2)$ . Si

## CHAPITRE 1. INTRODUCTION

---

$\alpha \in (1, 2)$ , alors on peut obtenir une loi des grands nombres et prouver que la marche a une vitesse asymptotique strictement positive. En revanche, si  $\alpha \in (0, 1)$ , alors la marche a une vitesse nulle, et on devrait plutôt la renormaliser par  $t^\alpha$  afin d'obtenir une limite non-dégénérée.

Tous ces résultats devraient également être vérifiés dans le modèle de pièges de Bouchaud  $\beta$ -biaisé, avec  $\beta \in (1, \infty)$ , voir [10]. En effet, des résultats similaires sont prouvés dans le cas  $\alpha \in (0, 1)$  par Zindy [96]. Une des grandes différences est la suivante. Dans le cas totalement dirigé, le marcheur visite successivement des nouveaux sommets car il saute seulement vers la droite. Ainsi, à chaque saut, on considère une nouvelle horloge exponentielle (un nouveau piège) indépendante de celles précédemment rencontrées. En revanche, dans le cas biaisé, le marcheur peut revenir sur ses pas, et l'on perd cette indépendance. En particulier, les nombres de visites à deux pièges adjacents sont fortement corrélés. Pour contourner cette difficulté, il faut alors prouver que, tout d'abord, les pièges peu profonds n'ont pas une grande conséquence, puis que le marcheur va contre sa dérive sur de petites distances, et enfin que les pièges suffisamment profonds sont loin les uns des autres et sont alors *essentiellement indépendants*.

Le modèle de pièges de Bouchaud met donc en évidence l'effet de ralentissement que peuvent provoquer les pièges.

Notons que ces modèles de pièges furent étudiés dans le cas non-biaisé et sur des graphes plus généraux par Ben Arous et Černý [6, 7, 8] et par Ben Arous, Černý et Mountford [9].

A présent, revenons aux MAMA et expliquons ce qui les lie aux modèles de pièges. Pour cela, il faut légèrement changer de point de vue, et considérer que le marcheur se promène sur un potentiel  $V = (V(x))_{x \in \mathbb{Z}}$ , dont il va suivre la pente.

On se place dans le cadre d'une marche transiente vers la droite, c'est-à-dire lorsque la loi de l'environnement est telle que  $\mathbb{E}(\ln \rho) < 0$ , où  $\rho = (1 - \omega_0)/\omega_0$ . Dans ce cas, le potentiel va globalement ressembler à une fonction qui décroît de  $+\infty$  à  $-\infty$  mais qui comprend certains *creux*, ou *vallées*, qui sont des *puits de potentiel* (voir Figure 1.4).

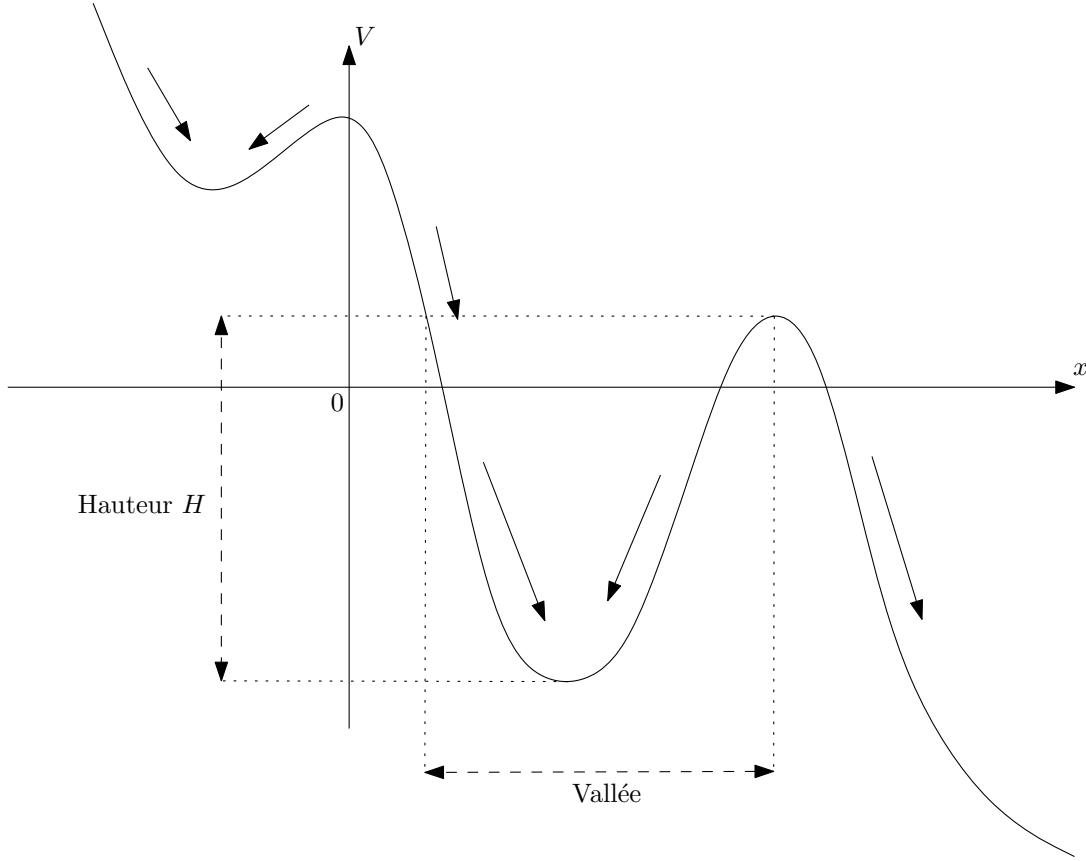
Ainsi, le potentiel peut, à certains endroits, présenter de fortes pentes positives que le marcheur devra surmonter pour pouvoir continuer à avancer. Plus précisément, on définit  $V$  tel que  $V(0) = 0$  et, pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ ,

$$\omega_x = \frac{e^{-V(x)}}{e^{-V(x)} + e^{V(x)}}.$$

Autrement dit, pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ ,

$$V(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^x \ln \rho(i, \omega) & \text{si } x \geq 1; \\ 0 & \text{si } x = 0; \\ -\sum_{i=x+1}^0 \ln \rho(i, \omega) & \text{si } x \leq -1. \end{cases}$$

La définition de ce potentiel fut introduite en 1982 par Sinai [71]. Nous allons rapidement donner une idée du lien fait entre le modèle de pièges de Bouchaud et les MAMA en

FIGURE 1.4 – Potentiel d’une MAMA sur  $\mathbb{Z}$ 

dimension 1 par Enriquez, Sabot et Zindy [35, 34]. Nous renvoyons également le lecteur à [10] qui donne une bonne vue d’ensemble sur ce sujet.

Tout d’abord, notons que  $V$  réalise des pas de taille  $\ln \rho$ , ce qui en fait une grandeur facile à analyser. D’autre part, nous pouvons relier le potentiel à la mesure invariante de la marche dans l’environnement  $\omega$  car  $\pi(x) = e^{-V(x)} + e^{-V(x-1)}$ , ce qui explique que la marche soit attirée par les endroits où  $V$  est petit.

Considérons une vallée du potentiel, c’est-à-dire un endroit où le potentiel présente un creux dans lequel le marcheur va devoir surmonter une pente positive pour pouvoir avancer (voir Figure 1.4). Cette vallée est donc un obstacle qui aura une certaine hauteur aléatoire  $H$ . En plus de  $\mathbb{E}(\ln \rho) < 0$ , supposons qu’il existe  $\alpha \in (0, 2)$  tel que  $\mathbb{E}(\rho^\alpha) = 1$ , que  $\mathbb{E}(\rho^\alpha \ln^+ \rho) < \infty$ , et que la distribution de  $\ln \rho$  n’est pas lattice. Dans ce cas, la hauteur d’une vallée vérifie :

$$\mathbb{P}(H \geq t) \sim e^{-\alpha t}.$$

Notons qu’il est nécessaire de supposer que  $\ln \rho$  n’est pas lattice pour pouvoir déduire cette approximation pour tout  $t > 0$  suffisamment grand, car ceci nous garantit une

## CHAPITRE 1. INTRODUCTION

---

certaine régularité de cette queue.

Alors, si on appelle  $T$  le temps nécessaire au marcheur pour sortir de ce creux de potentiel, on peut faire l'approximation  $T = e^H$ , et ainsi on retrouve :

$$\mathbb{P}(T \geq t) \sim t^{-\alpha},$$

ce qui correspond aux hypothèses faites sur le temps d'attente sur un sommet dans le modèle de pièges de Bouchaud. Pour voir le lien avec ce dernier, il suffit à présent de considérer cette marche *vue de loin*, dans le sens où un puits de potentiel sera vu comme un seul sommet dans le modèle de pièges de Bouchaud. Dans le même esprit que précédemment, on peut montrer que les visites aux pièges profonds (ceux qui ont une influence) sont essentiellement indépendantes car ceux-ci se trouvent loin les uns des autres.

D'autre part, nous n'avons plus affaire à une marche biaisée, mais on se libère de cette contrainte en ne s'intéressant seulement au fait que le marcheur se déplace vers la gauche (contre sa dérive) sur de petites distances.

Dans la section suivante, nous allons généraliser la définition des MAMA sur  $\mathbb{Z}^d$ . Cependant, comme nous le verrons, les résultats sont beaucoup plus rares et les énoncés sont plus techniques.

### 2.2 En dimension $d \geq 2$ : conditions $(T)$ et $(P)$ , uniforme ellipticité et ballisticité

Tout d'abord, nous allons définir les marches aléatoires en milieux aléatoires en dimension  $d \geq 2$ . Appelons  $U := (e_i)_{i \in \{1, \dots, 2d\}}$ , l'ensemble des  $2d$  vecteurs tels que  $(e_i)_{i \in \{1, \dots, d\}}$  constituent la base canonique de  $\mathbb{Z}^d$ , et, pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $e_{i+d} = -e_i$ .

Les probabilités de transition sont définies par l'environnement  $\omega = (p^\omega(x, \cdot))_{x \in \mathbb{Z}^d}$ , où  $p^\omega(x, e_i)$  est la probabilité de sauter sur le sommet  $x + e_i$  lorsque le marcheur se trouve sur  $x$ , dans l'environnement  $\omega$ . Définissons

$$\Omega := \left\{ \omega = (p^\omega(x, \cdot))_{x \in \mathbb{Z}^d} : p^\omega(x, e_i) \in [0, 1], \forall i \in \{1, \dots, 2d\}, \sum_{i \in \{1, \dots, 2d\}} p^\omega(x, e_i) = 1, \forall x \in \mathbb{Z}^d \right\}.$$

Comme précédemment, nous noterons  $P_x^\omega$ ,  $x \in \mathbb{Z}^d$  et  $\omega \in \Omega$ , la loi canonique de la chaîne de Markov sur  $\mathbb{Z}^d$ , partant de  $x$ , et dont les probabilités de transition sont décrites par l'environnement  $\omega$ , et  $\mathbf{P}$  la mesure sous laquelle les coordonnées  $(p^\omega(x, \cdot))_{x \in \mathbb{Z}^d}$  sont indépendantes et identiquement distribuées. On définit également, pour  $x \in \mathbb{Z}^d$ , la mesure  $\mathbb{P}_x = \int P_x^\omega d\mathbf{P}$ . Finalement, on a

$$P_0^w(X_{n+1} = x + e_i | X_n = x) = p^\omega(x, e_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, 2d\},$$

$$\mathbb{E}_0(f) := \int_{\Omega} E_0^\omega(f) d\mathbf{P}(\omega), \text{ pour tout } f \text{ mesurable et bornée.}$$

Dans le cas multi-dimensionnel, il n'existe pas encore de classification similaire au Théorème 2.1 dû à Solomon et les critères de récurrence, de transience et de ballisticité sont encore des sujets de recherche à explorer.

Les techniques utilisées en dimension 1 ne s'applique pas aux dimensions supérieures. En effet, la réversibilité de la marche n'est pas conservée, ce qui complique le problème, en particulier pour utiliser la méthode de l'environnement vu de la particule.

Nous allons tout d'abord introduire les résultats obtenus par Sznitman [77] en 2001 qui s'est intéressé au cas particulier des marches directionnellement transientes et à leur vitesse asymptotique. Quelques définitions seront nécessaires. Une marche est dite transiente dans une direction  $\ell \in S^{d-1}$ , si

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \cdot \ell = \infty \right) = 1.$$

De plus, on dit qu'une marche est ballistique dans une certaine direction  $\ell \in S^{d-1}$  si

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n \cdot \ell}{n} > 0 \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

D'autre part, nous dirons qu'une marche est *uniformément elliptique* si le marcheur peut emprunter n'importe quelle arête avec une probabilité minorée : pour tout  $i \in \{1, \dots, 2d\}$ ,

$$p^\omega(0, e_i) \geq \kappa \quad \mathbf{P}\text{-p.s.}, \quad (2.1)$$

où  $\kappa \in (0, 1/2d)$  est la *constante d'ellipticité*. Une marche est *elliptique* si, pour tout  $i \in \{1, \dots, 2d\}$ ,

$$p^\omega(0, e_i) > 0 \quad \mathbf{P}\text{-p.s.} \quad (2.2)$$

Sznitman a émis la conjecture qu'une MAMA sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ , qui est uniformément elliptique et transiente dans une certaine direction  $\ell \in S^{d-1}$  est alors ballistique dans cette direction.

**Conjecture 2.2** (Sznitman, [79]). *Considérons une MAMA uniformément elliptique sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ , et fixons une direction  $\ell \in S^{d-1}$ . Si la marche est transiente dans la direction  $\ell$ , alors elle est ballistique dans cette direction.*

Sznitman [77] prouva cette conjecture sous une hypothèse de transience plus forte qui est aujourd'hui connue sous le nom de condition (T) de Sznitman. Plus tard, des conditions similaires ont été introduites appelées les conditions (T') et  $(T)_\gamma$ ,  $\gamma \in (0, 1)$ , voir [79].

## CHAPITRE 1. INTRODUCTION

---

**Définition 2.3.** Soient  $\ell \in S^{d-1}$ ,  $b > 0$ ,  $L > 0$  et  $\gamma \in (0, 1]$ . Définissons une tranche, autour de 0,  $U_{\ell,b,L} = \{x \in \mathbb{Z}^d : -bL < x \cdot \ell < L\}$ , d'épaisseur  $(1+b)L$ , ainsi que le temps de sortie de cette tranche  $T_{U_{\ell,b,L}} = \inf\{n \geq 0 : X_n \notin U_{\ell,b,L}\}$ . La condition  $(T)_\gamma$  est vérifiée par rapport à  $\ell$  (notée  $(T)_\gamma^\ell$ ), si pour tout  $\ell'$  dans un voisinage de  $\ell$ , on a :

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} L^{-\gamma} \log \mathbb{P}_0 \left( X_{T_{U_{\ell',b,L}}} \cdot \ell' < 0 \right) < 0, \text{ pour tout } b > 0.$$

De plus, on dit que la condition  $(T)$  relative à  $\ell$  est vérifiée si  $(T)_1^\ell$  est vérifiée, et on dit que la condition  $(T')$  relative à  $\ell$  est vérifiée si  $(T)_\gamma^\ell$  est vérifiée pour tout  $\gamma \in (0, 1)$ .

Intuitivement, considérons une marche transiente dans une certaine direction  $\ell \in S^{d-1}$  et coupons l'espace en *tranches* orthogonales à  $\ell$ . Ainsi, si un marcheur sort d'une tranche *par l'avant*, il avance dans la direction  $\ell$ , et s'il sort *par l'arrière*, il recule (voir Figure 1.5). Les conditions  $(T)$ ,  $(T')$  et  $(T)_\gamma$  exigent que la probabilité qu'un marcheur sorte par l'arrière d'une tranche, étant donné un certain point de départ, décroît exponentiellement en la largeur de la tranche.

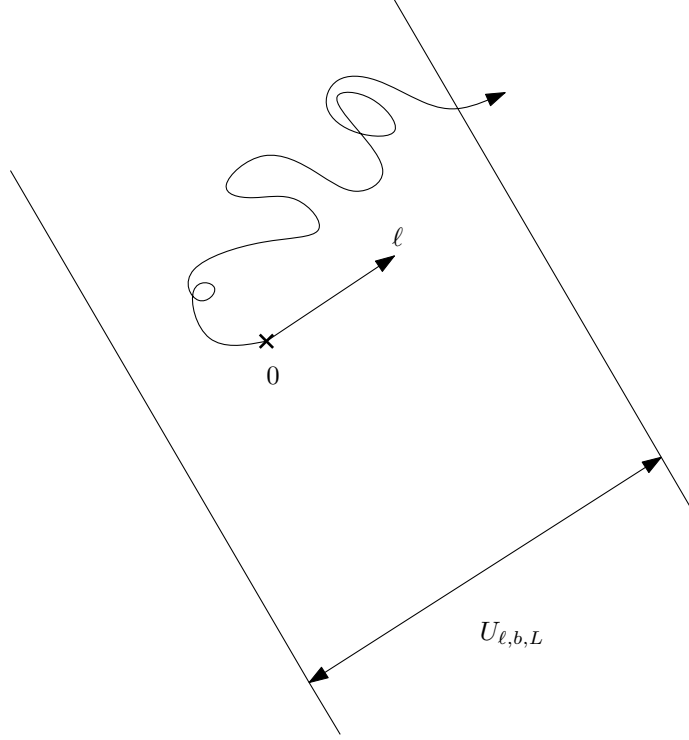
Il est conjecturé que les conditions  $(T)$ ,  $(T')$  et  $(T)_\gamma$ ,  $\gamma \in (0, 1)$  sont équivalentes. Il est évident que  $(T) \Rightarrow (T') \Rightarrow (T)_\gamma$ , pour tout  $\gamma \in (0, 1)$ . Sznitman [77] prouva que  $(T)_\gamma$ ,  $\gamma \in (1/2, 1)$  implique  $(T')$ . Drewitz et Ramírez [27] ont étendu ce résultat à  $\gamma \in (0, 1)$  en dimensions supérieures à 3.

**Théorème 2.4** (Sznitman, [77]). *Considérons une MAMA uniformément elliptique sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ , et fixons une direction  $\ell \in S^{d-1}$ . Si la marche est transiente dans la direction  $\ell$ , et si elle vérifie la condition  $(T)^\ell$ , alors elle est ballistique dans cette direction.*

Ce résultat entre en contraste avec les résultats du Théorème 2.1 en dimension 1. Rappelons que, en dimension 1, il existe des exemples de marches directionnellement transientes mais non-ballistiques, y compris dans le cas uniformément elliptique. Intuitivement, en dimension 1, le coût de la création d'un piège est du même ordre que le temps nécessaire pour en sortir. En revanche, en dimensions supérieures, ce coût est beaucoup trop important : créer un piège ayant un temps de sortie polynomial a un coût supérieur à tout polynôme.

Un des grands enjeux dans le domaine des MAMA serait donc de prouver que la condition  $(T)$  est en effet toujours vérifiée par une marche transiente et uniformément elliptique. Cette condition  $(T)$  peut paraître naturelle mais il est techniquement très difficile de la vérifier. Sznitman [78] a démontré qu'il est équivalent de vérifier un autre critère, dit *effectif* dans le sens où il suffit d'observer des boîtes de tailles finies.

Ces conditions peuvent être exprimées en matière de *temps de régénération*. Ces temps correspondent aux instants à partir desquels le marcheur ne fera plus marche arrière. Plus précisément, il s'agit d'une suite de temps  $(\tau_n)$  pour lesquels  $X_n \cdot \ell$  dépasse

FIGURE 1.5 – Tranche orthogonale à la direction  $\ell$ .

son dernier maximum local d'une quantité  $a > 0$ , puis ne redescendra plus jamais en dessous de cette valeur. Il est clair que ces temps ne sont *pas* des temps d'arrêt pour la filtration engendrée par  $(X_n)$ . Ces temps de régénération sont très utiles (en particulier pour donner une loi des grands nombres), car ils permettent de découper le processus en blocs i.i.d. Nous n'en donnerons pas une définition formelle (voir [40], Chapitre 3), mais la Figure 1.6 donne une bonne idée de leur structure.

La condition (T) est équivalente à exiger que le supremum de la marche entre 0 et  $\tau_1$  (le premier temps de régénération) a un moment exponentiel.

Enfin, notons qu'une condition moins exigeante fut proposée par Berger, Drewitz et Ramírez [16]. Il s'agit de la *condition polynomiale* qui impose seulement que la probabilité de ne pas sortir par l'avant d'une boîte finie ait une décroissance polynomiale en la taille de la boîte. Donnons une définition précise de cette condition qui nous sera utile dans la section suivante.

Pour tous  $L, \tilde{L} > 0$  et tout  $\ell \in S^{d-1}$ , on définit la boîte

$$B_{L,\tilde{L}}^\ell := R\left((-L, L) \times (-\tilde{L}, \tilde{L})^{d-1}\right) \cap \mathbb{Z}^d,$$

où  $R$  est la rotation de  $\mathbb{R}^d$  centrée en 0 qui envoie  $e_1$  sur  $\ell$ . On définit également  $T_{B_{L,\tilde{L}}^\ell}^{\text{ex}}$

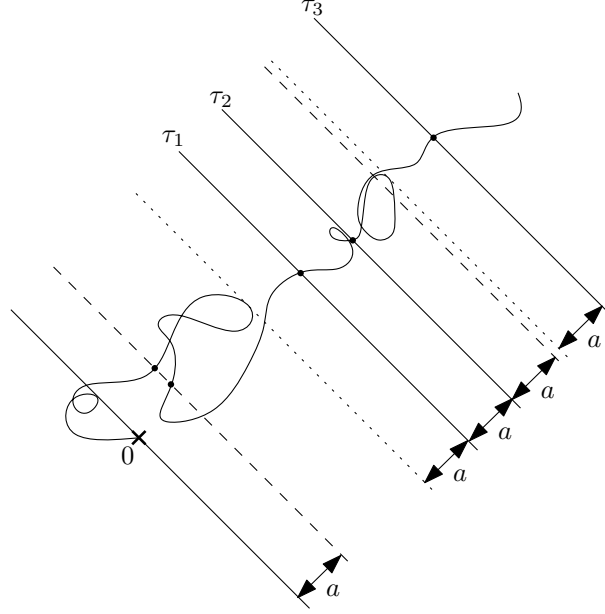


FIGURE 1.6 – Temps de régénération et blocs i.i.d.

le temps de sortie de cette boîte, ainsi que la constante

$$L_0 := \frac{2}{3} 3^{29d}.$$

**Définition 2.5.** *Pour  $M \geq 1$  et  $\ell \in S^{d-1}$ , on dit que la marche vérifie la condition  $(P)_M^\ell$  si, pour tout  $L \geq L_0$  et  $\tilde{L} \leq 70L^3$ ,*

$$\mathbb{P}[X_{T_{B_{L,\tilde{L}}}^{\ell}} \cdot \ell < L] \leq \frac{1}{L^M}. \quad (2.3)$$

Il a été démontré par Campos et Ramírez [19] que, sous des hypothèses très légères, la condition  $(P)$  est équivalente à la condition  $(T')$ . Plus précisément, on dit qu'une marche vérifie la condition  $(E)_0$  si

$$\text{pour tout } e \in U, \text{ il existe } \eta_e > 0 \text{ tel que } \mathbf{E} \left( (p^\omega(0, e))^{-\eta_e} \right) < \infty. \quad (2.4)$$

**Théorème 2.6** (Théorème 1.1 de [19]). *Si une marche dans un environnement i.i.d. elliptique (voir (2.2)) vérifie la condition  $(E)_0$  et la condition  $(P)_M^\ell$ , pour une certaine direction  $\ell \in S^{d-1}$  et pour un certain  $M \geq 15d+5$ , alors cette marche vérifie la condition  $(T')^\ell$ .*



## 2.3 Critères d'ellipticité : résultats obtenus en collaboration avec A. Fribergh

Il n'existe pas, à ce jour, de résultat semblable au Théorème 2.1 de Solomon qui nous donnerait une description complète de la transience-réurrence et de la vitesse d'une MAMA sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ .

Cependant, dans la section précédente, nous avons vu que lorsqu'une MAMA sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ , directionnellement transiente, est uniformément elliptique, on s'attend à ce que la marche soit ballistique (voir Conjecture 2.2).

À présent, que se passe-t-il si l'on supprime la condition d'uniforme ellipticité ? Une MAMA directionnellement transiente sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ , qui est seulement elliptique (voir la Définition (2.2)), peut-elle être fortement ralentie par les pièges de son environnement et ainsi avoir une vitesse asymptotique nulle ? Si c'est le cas, quel est le critère qui nous permet de savoir si une marche directionnellement transiente est ballistique ou non ?

On sait qu'il existe sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ , des marches elliptiques qui sont directionnellement transientes mais qui ne sont pas ballistiques, voir Bouchet [18], Sabot [63, 64] et Sabot et Tournier [67]. Le premier exemple d'une telle marche serait dû à Fribergh, mais n'a jamais été écrit. L'idée générale de cet exemple est de choisir un environnement tel que, la plupart du temps, celui-ci ressemble à une marche biaisée mais, de temps en temps, un piège apparaît et retient le marcheur pendant suffisamment longtemps. Dans cet exemple, les pièges sont des arêtes dont les probabilités de sortie sont anormalement petites et dont les temps de sortie est anormalement grands.

Plus précisément, considérons une collection i.i.d. de variables aléatoires  $(Z_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ , un réel  $\beta > 1$ , et définissons, pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ , trois probabilités de transition  $p_i(x, \cdot)$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , qui sont déterministes conditionnellement à  $Z_x$ . On définit :

1.  $p_1(x, e_1) = \beta/(\beta + 2d - 1)$  et pour tout  $k \in \{2, \dots, 2d\}$ ,  $p_1(x, e_k) = 1/(\beta + 2d - 1)$  ;
2.  $p_2(x, e_1) = \beta/(\beta + Z_x + 2d - 2)$ ,  $p_2(x, e_2) = Z_x/(\beta + Z_x + 2d - 2)$  et pour tout  $k \in \{3, \dots, 2d\}$ ,  $p_2(x, e_k) = 1/(\beta + Z_x + 2d - 2)$  ;
3.  $p_3(x, e_1) = \beta/(\beta + Z_x + 2d - 2)$ ,  $p_3(x, e_{2+d}) = Z_x/(\beta + Z_x + 2d - 2)$ , où  $e_{2+d} = -e_2$  et pour tout  $k \in \{2, \dots, 2d\} \setminus \{2 + d\}$ ,  $p_3(x, e_k) = 1/(\beta + Z_x + 2d - 2)$ .

On définit à présent notre environnement tel que, pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\mathbf{P}[p^\omega(x, \cdot) = p_i(x, \cdot)] = 1/3$ , pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ . D'autre part, on choisit la variable  $Z$  telle que  $\mathbb{P}(Z \geq n) \geq 1/\sqrt{n}$ , pour tout entier  $n \geq 1$ . À présent, considérons  $T$  le premier temps où le marcheur est en dehors de l'arête  $\{0, 0 + e_2\}$ . Sur l'événement tel que  $p^\omega(0, \cdot) = p_2(0, \cdot)$  et  $p^\omega(e_2, \cdot) = p_3(e_2, \cdot)$ , on peut alors montrer que le temps de sortie  $T$  est infini en moyenne *annealed*, c'est-à-dire que  $\mathbb{E}(E_0^\omega(T)) = \infty$ . Il n'est pas alors difficile de déduire la vitesse asymptotique nulle de la marche.

Cet exemple illustre bien l'idée que la transience directionnelle correspond au com-

## CHAPITRE 1. INTRODUCTION

---

portement moyen, ou typique, de la marche, tandis que la vitesse asymptotique est plutôt de la même nature que des queues de variables aléatoires.

Dans [40], en collaboration avec A. Fribergh (voir Chapitre 3), nous donnons un nouvel exemple de marche directionnellement transiente ayant une vitesse nulle. D'autre part, nous y expliquons que le piège typique ressemblerait à un hypercube plutôt qu'à une arête.

Etant donné l'existence de marches elliptiques non-ballistiques, on aimerait pouvoir trouver un critère garantissant qu'une marche directionnellement transiente est ballistique (sous quelques hypothèses) et tel que si ce critère n'est pas vérifié, alors la marche est transiente mais sous-ballistique. Dans ce cas, le critère serait *optimal*.

Ce n'est que très récemment que la recherche a été active à ce sujet. Dans leur article [19], Campos et Ramírez propose un critère d'ellipticité qui fut ensuite amélioré par Bouchet, Ramírez et Sabot [17]. Ce critère semble s'inspirer de la dynamique des marches en milieux de Dirichlet, et correspond à étudier le temps de sortie d'une arête.

**Définition 2.7.** Soit  $\beta > 0$ . On dit qu'un environnement satisfait la condition d'ellipticité  $(E')_\beta$  s'il existe une famille  $\{\alpha(e) : e \in U\} \in (0, \infty)^{2d}$  telle que

$$\kappa(\{\alpha(e) : e \in U\}) := 2 \sum_{e' \in U} \alpha(e') - \sup_{e \in U} (\alpha(e) + \alpha(-e)) > \beta,$$

et, pour tout  $e \in U$ ,

$$\mathbb{E} \left( \prod_{e' \neq e} (p^\omega(0, e'))^{-\alpha(e')} \right) < \infty.$$

**Remarque 2.8.** La condition  $(E')_\beta$  implique la condition  $(E)_0$ , définie en (2.4).

**Théorème 2.9** (Théorème 2 de [17]). *Considérons une marche aléatoire dans un environnement i.i.d. elliptique sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ . Soit  $\ell \in S^{d-1}$  et  $M \geq 15d + 5$ . Si la marche satisfait la condition polynomiale  $(P)_M^\ell$  et la condition d'ellipticité  $(E')_1$ , alors la marche est ballistique dans la direction  $\ell$  et il existe un vecteur  $v \in \mathbb{R}^d$ ,  $v \neq 0$ , tel que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = v, \quad \mathbb{P}_0\text{-a.s.}$$

Ce critère décrit très bien le cas des marches dans des environnements de Dirichlet. Nous ne précisons pas ici cette loi et nous renvoyons le lecteur à [17], par exemple, pour une définition de cet environnement qui peut être vu comme une marche renforcée par arêtes (voir [33]). Cependant, précisons que cette loi est définie par des paramètres  $(\beta_1, \dots, \beta_{2d})$  et que la condition  $(E')_\beta$  est vérifiée si et seulement si

$$2 \sum_{i=1}^{2d} \beta_i - \max_{i \in \{1, \dots, 2d\}} (\beta_i + \beta_{i+d}) > \beta, \quad (2.5)$$

De plus, si (2.5) est satisfait pour  $\beta = 1$  et que la marche vérifie la condition  $(P)_M^\ell$ , pour  $M \geq 15d + 5$  et pour une certaine direction  $\ell$ , alors elle est ballistique dans cette direction. D'autre part, si (2.5) n'est pas vérifiée pour  $\beta = 1$ , alors la marche n'est pas ballistique. Notons également qu'une condition suffisante est donnée par le Théorème 5 de [17] pour qu'une marche de Dirichlet vérifie la condition polynomiale.

Ainsi, dans le cas de marches dans des environnements de Dirichlet, le critère  $(E')_1$  est optimal. Ceci est peut-être dû au fait que l'on peut définir les probabilités de transition autour d'un sommet grâce à des variables aléatoires indépendantes et dont la queue est suffisamment régulière.

En revanche, en dehors du cas des marches dans des environnements de Dirichlet, le critère  $(E')_\beta$  n'est plus optimal. En effet, il ne prend en compte que le temps de sortie d'une arête, ce qui suppose que les pièges typiques sont des arêtes isolées.

Il semblerait plutôt qu'un piège efficace sur  $\mathbb{Z}^d$  soit un hypercube. Pour justifier cela, imaginons qu'une certaine forme de  $\mathbb{Z}^d$  emprisonne le marcheur suffisamment longtemps. Dans ce cas, considérons les  $2^d$  "coins" de cette forme. Ces derniers renvoient fortement le marcheur vers l'intérieur de la forme. Moralement, on peut alors translater ces  $2^d$  coins sur les  $2^d$  coins d'un hypercube qui emprisonnerait alors le marcheur. Il suffit ensuite de remarquer que l'environnement crée plus facilement cet hypercube que la forme de départ (car tout son bord est conditionné à être *imperméable*). Dans cet esprit, nous prouvons dans un travail [40] en collaboration avec Alexander Fribergh un nouveau critère d'ellipticité qui est plus général que la condition  $(E')_1$  et que nous pensons proche de l'optimalité.

Dans un premier temps, énonçons un critère de vitesse nulle qui nécessite moins de notations et qui nous permettra d'expliquer intuitivement le critère pour la ballisticité. Notons  $\mathfrak{H}$  l'hypercube de  $\mathbb{Z}^d$  ancré en 0, c'est-à-dire

$$\mathfrak{H} := \left\{ \sum_{i=1}^d \varepsilon_i e_i : \varepsilon_i \in \{0, 1\}, \text{ for all } i \in \{1, \dots, d\} \right\},$$

et notons  $T_{\mathfrak{H}}^{\text{ex}}$  le temps de sortie de cet hypercube, soit

$$T_{\mathfrak{H}}^{\text{ex}} := \inf\{n \geq 0 : X_n \notin \mathfrak{H}\}.$$

**Définition 2.10.** *On dit qu'un environnement satisfait la condition (H) si*

$$\max_{x \in \mathfrak{H}} \mathbb{E}_x [T_{\mathfrak{H}}^{\text{ex}}] = \infty.$$

**Théorème 2.11** (Fribergh, K., [40]). *Considérons une MAMA dans un environnement i.i.d. elliptique, transiente dans une certaine direction  $\ell \in S^{d-1}$ . Si la condition (H) est vérifiée, alors la marche a une vitesse asymptotique nulle.*

## CHAPITRE 1. INTRODUCTION

---

Nous pensons que ce dernier critère caractérise les marches transientes à vitesse nulle. Réciproquement, nous pensons donc qu'une marche directionnellement transiente dont le temps de sortie d'un hypercube a une moyenne *annealed* finie est ballistique.

Avant d'énoncer le critère d'ellipticité proposé dans [40], discutons un moment de la négation de (H). Dans ce but, introduisons quelques notations. Si  $H \subset \mathbb{Z}^d$  est un hypercube contenant 0, on définit, pour tout  $x \in H$ , l'ensemble

$$\partial_x H := \{y \sim x : y \notin H\} \text{ et } \partial H := \bigcup_{x \in H} \partial_x H.$$

Définissons également la plus grande probabilité, partant de  $x \in H$  de sortir en un pas de l'hypercube :

$$Q_x^H := \max_{y \in \partial_x H} p^\omega(x, y - x),$$

ainsi que la probabilité, partant de  $x$  de sortir par un sommet  $y \in H$  avant de revenir en  $x$  :

$$\tilde{Q}_{x,y}^H := P_x^\omega(T_{\partial H} < T_x^+, X_{T_{\partial H}} \in \partial_y H),$$

où

$$T_{\partial H} = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \partial H\} \text{ et } T_x^+ := \inf\{n > 0 : X_n = x\}.$$

Il n'est pas trop difficile de démontrer la proposition suivante (voir [40]).

**Proposition 2.12.** *La condition (H)<sup>c</sup> est vérifiée si pour tout hypercube aléatoire  $h(\omega)$  contenant p.s. 0, on a*

$$\mathbb{E} \left( \min_{y \in h(\omega)} \left( \tilde{Q}_{0,y}^{h(\omega)} \right)^{-1} \right) < \infty. \quad (2.6)$$

Dans la proposition précédente, le caractère aléatoire de l'hypercube est superficiel mais nous permet de faire la connexion avec ce qui suit.

Pour la condition que nous proposons dans [40], il est nécessaire d'introduire un hypercube aléatoire particulier baptisé *hypercube markovien marqué*. Nous n'en donnons ici pas une définition précise (voir [40] et Chapitre 3) mais il s'agit d'un hypercube aléatoire dont l'intérêt principal est que les probabilités de transition à l'intérieur de l'hypercube sont indépendantes de celles à l'extérieur.

En effet, cet hypercube  $h(\omega)$  est découvert de façon markovienne : partant de 0, l'hypercube est découvert, ou construit, sommet par sommet, et le choix du sommet suivant ne dépend que des sommets déjà découverts.

A cet hypercube markovien, nous associons des *marques*  $(\alpha_x(\omega))_{x \in \mathfrak{H}}$  qui sont des variables aléatoires réelles positives mesurables par rapport à  $\{p^\omega(y, \cdot), y \in h(\omega)\}$ .

Nous définissons aussi un sommet d'ancrage  $x_0(\omega)$  défini comme l'unique point tel que

$$\{x_0(\omega) + y, y \in \mathfrak{H}\} = h(\omega).$$

**Définition 2.13.** On note  $(K)_\alpha$  la condition suivante :

1. il existe  $\gamma_x \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \in \mathfrak{H}$ , tels que

$$\mathbf{E} \left[ \left( Q_x^{\mathfrak{H}} \right)^{-\gamma_x} \right] < \infty, \text{ pour tout } x \in \mathfrak{H},$$

2. il existe un hypercube markovien marqué  $(h(\omega), (\alpha_x(\omega))_{x \in \mathfrak{H}})$  tel que

$$\mathbf{E} \left[ \prod_{x \in \mathfrak{H}} \left( \tilde{Q}_{0, x_0(\omega)+x}^{h(\omega)} \right)^{-\alpha_x(\omega)} \right] < \infty,$$

3. il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\sum_{x \in \mathfrak{H}} (\gamma_x \wedge \alpha_x(\omega)) \geq \alpha + \varepsilon \quad \mathbf{P}\text{-p.s.}$$

Après avoir énoncé notre principal résultat issu de [40] nous justifierons pourquoi cette condition à l'apparence compliquée est en réalité très proche de  $(H)^c$ .

Rappelons nous également que la condition  $(P)_M$  est une condition de transience technique, moins exigeante que la condition  $(T')$ , voir Définition 2.5. D'autre part, la condition  $(E)_0$  est une condition d'ellipticité très légère, voir (2.4).

**Théorème 2.14** (Fribergh, K., [40]). *Considérons une MAMA dans un environnement i.i.d. elliptique qui vérifie les conditions  $(E)_0$  et  $(P)_M^\ell$ , avec  $M \geq 15d + 5$ , et pour une certaine direction  $\ell \in S^{d-1}$ . Si, de plus,  $(K)_1$  est vérifié, alors la marche est ballistique dans la direction  $\ell$ , c'est-à-dire*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = v, \text{ où } v \cdot \ell > 0.$$

Nous prétendons alors que le Théorème 2.11 et le Théorème 2.14 sont presque complémentaires. La principale différence est que nous exigeons un temps de sortie de l'hypercube ayant un moment  $1 + \varepsilon$ , avec  $\varepsilon > 0$ , afin de pouvoir mener des calculs de grandes déviations.

Pour justifier ceci, rappelons que le Théorème 2.11 énonce que si la condition  $(H)$  est vérifiée pour une certaine marche, alors cette marche a une vitesse nulle. D'autre part, la condition  $(H)^c$  est équivalente à (2.6).

Maintenant, justifions que  $(K)$  n'est pas une condition trop exigeante, en particulier justifions le fait que (2.6) est très proche du deuxième point de la Définition 2.13.

Considérons des variables indépendantes  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  dont les queues sont polynomiales. Un simple calcul permet de montrer qu'il y a équivalence entre

1. il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $E \left[ \left( \min_{1 \leq i \leq n} X_i \right)^{1+\varepsilon} \right] < \infty,$

2. il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i > 1 + \varepsilon$  et pour tout  $1 \leq i \leq n$  on a  $E[X_i^{\alpha_i}] < \infty$ ,  
 ou de façon équivalente  $E\left[\prod_{1 \leq i \leq n} X_i^{\alpha_i}\right] < \infty$ .

Etant donnés ces arguments, le premier point de la condition  $(K)_\alpha$  n'est pas trop exigeant, car si les probabilités  $Q$  sont suffisamment régulières, ce point est nécessaire, dans le sens où sa négation implique  $(H)$ .

Ensuite, comparons le deuxième point de  $(K)_\alpha$  à (2.6). Ici, nous considérons le minimum de variables aléatoires corrélées : dans ce cas, les exposants  $(\alpha_x(\omega))$  sont aléatoires, ce qui nous donne une flexibilité supplémentaire.

Enfin, le troisième point est ajouté à la condition  $(K)_\alpha$  afin de donner des bornes déterministes aux  $(\alpha_x(\omega))$ . Ceci peut sembler brutal, mais cette exigence est compensée par le fait que l'hypercube est aléatoire. Moralement, on choisit l'hypercube dans lequel le marcheur bouge le plus facilement (et non pas celui duquel il sort le plus facilement). Ceci nous empêche de considérer un hypercube duquel il est trop facile de sortir, étant donné l'environnement : en effet, sans condition sur  $(\alpha_x(\omega))$ , il existe toujours, de manière évidente, un hypercube autour de 0 duquel on sort facilement. Notons également qu'il suffit de trouver un hypercube markovien satisfaisant  $(K)_1$ , dont le temps de sortie est fini en espérance, pour montrer que le temps de sortie de n'importe quel hypercube est fini.

Concluons par quelques mots sur la preuve du Théorème 2.14. La principale difficulté pour prouver un tel résultat réside dans la démonstration du fait que le marcheur atteint un point suffisamment loin avec une probabilité suffisamment grande. Plus précisément, on montre que, si  $(K)_1$  est vérifiée, alors le marcheur atteint un certain point à distance  $\log(n)$  avec une probabilité plus grande que  $1/n^{1-\varepsilon}$ . Une fois un tel chemin construit, la preuve est ensuite assez courte, utilisant principalement le Théorème 2.6 et des techniques similaires à celles introduites par Sznitman [77].

## 3 Apprentissage par renforcement pour des dynamiques de réseaux sociaux

Le but de cette section est d'introduire un modèle de formation de réseaux sociaux, issu d'un article [47] en collaboration avec Pierre Tarrès (voir Chapitre 4), et de présenter nos résultats à ce sujet.

En Section 3.2, nous introduirons ce modèle de formation de réseaux dans lequel chaque individu aura plus tendance à communiquer avec les individus avec qui il a déjà communiqué auparavant. On reconnaît ici une dynamique de renforcement : il s'agit en fait d'*apprentissage par renforcement*. Cette procédure du type *try-and-error* permet de

considérer des individus, impliqués dans un jeu social, ayant un bas degré de rationalité.

Notre modèle peut être vu comme une généralisation du *Signaling game* avec apprentissage par renforcement, dont nous allons donner la définition en Section 3.1, en énonçant les résultats obtenus par Argiento, Pemantle, Skyrms et Volkov [2] puis par Hu, Skyrms et Tarrès [45] dans un cadre plus général.

### 3.1 *Signaling game* et algorithmes stochastiques

Le *Signaling game*, ou jeu de signaux, est un modèle de création de langage qui fut en premier lieu proposé par Skyrms. Il s'agit d'un jeu à deux joueurs : l'Emetteur, le Receveur. Ces joueurs ont à leur disposition un ensemble  $\mathcal{S}_1$  de  $M_1$  états de nature, qui correspondent de façon bijective à des actions, ainsi qu'un ensemble  $\mathcal{S}_2$  de  $M_2$  signaux qui n'ont a priori aucune signification (ils ne sont naturellement associés à aucune des actions). On fera volontairement la confusion entre états et actions en leur donnant le même nom. La *Nature* intervient également dans ce jeu, ce qui permet d'ajouter de l'aléa. Il s'agit d'un jeu itératif, où chaque itération se déroule en quatre étapes :

- La Nature impose un état de nature à l'Emetteur, mais le Receveur ne le voit pas ;
- L'Emetteur choisit un des signaux et l'envoie au Receveur ;
- Le Receveur voit le signal (mais toujours pas l'état), et choisit une des actions ;
- L'Emetteur et le Receveur reçoivent un gain 1 si l'action choisie par le Receveur correspond à l'état imposé par la Nature.

Dans les travaux que nous présentons ici, les joueurs feront leurs choix en fonction de leurs choix et gains passés, suivant les principes de l'apprentissage par renforcement. Ceci correspond au cas où les joueurs ont un bas niveau de rationalité.

Le but est alors de savoir si les joueurs réussissent à créer un langage. Autrement dit, est-ce que, asymptotiquement, les joueurs auront associé un unique signal à chaque état de nature et inversement ? Auront-ils créé une bijection entre états et signaux ? Ces deux questions n'ont un sens que si  $M_1 = M_2$ . Quelle serait alors l'allure asymptotique des communications lorsque  $M_1 \neq M_2$  ?

Nous allons à présent définir un processus aléatoire à temps discret, respectant les étapes du jeu décrit précédemment et dans lequel les joueurs suivent une procédure d'apprentissage par renforcement. Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout couple  $\{i, j\} \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ ,  $V_{ij}^n$  le gain cumulé du couple  $\{i, j\}$  au temps  $n$ , initialisé à  $V_{ij}^0 = 1$ . Chaque unité de temps correspond à une itération du jeu. A chaque instant  $n$ , la Nature va choisir au hasard et uniformément l'un des états de nature : chacun d'entre eux est choisi avec probabilité  $1/M_1$ . Disons que la Nature a tiré un état  $i_0 \in \mathcal{S}_1$ . L'Emetteur

## CHAPITRE 1. INTRODUCTION

---

choisit alors l'un des signaux au hasard : la probabilité qu'il choisisse le signal  $j_0 \in \mathcal{S}_2$  est

$$\frac{V_{i_0 j_0}^n}{\sum_{j \in \mathcal{S}_2} V_{i_0 j}^n}.$$

Le Receveur observe ce signal  $j_0$  et choisit à son tour une action  $i_1 \in \mathcal{S}_1$  avec probabilité :

$$\frac{V_{i_1 j_0}^n}{\sum_{i \in \mathcal{S}_1} V_{i j_0}^n}.$$

Enfin, les joueurs reçoivent leurs gains, et l'on incrémente leurs gains cumulés de sorte que, pour tout  $\{i, j\} \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ ,

$$V_{ij}^{n+1} = V_{ij}^n + \mathbf{1}_{\{i=i_0, j=j_0\}}.$$

Ce processus peut être schématisé par un graphe biparti (voir Figure 1.7, dans le cas avec deux états et deux signaux).

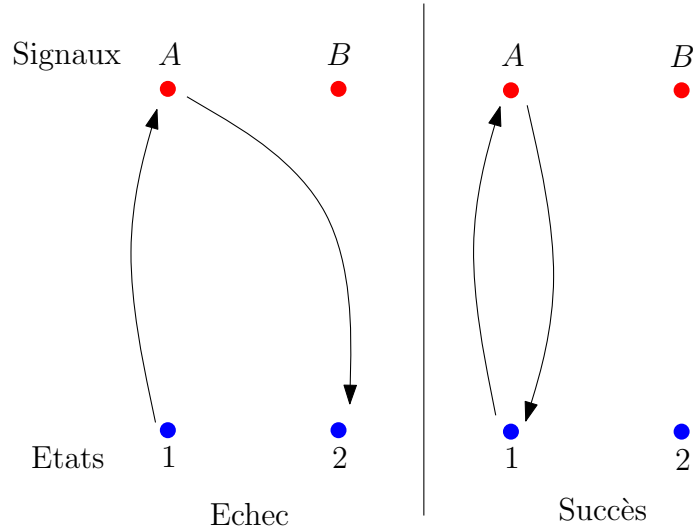


FIGURE 1.7 – Schéma d'un *Signaling game* avec deux états 1 et 2, et deux signaux A et B. Dans le premier cas, l'Émetteur voit 1 et envoie A, mais le Receveur, voyant A uniquement, choisit 2, et il n'y a donc pas succès. En revanche, dans le deuxième cas, il y a succès.

Ainsi, à chaque instant il y a succès sur une arête  $\{i, j\}$  si et seulement si la Nature choisit  $i$ , l'Émetteur envoie  $j$  et le Receveur choisit  $i$ . S'il y a succès, alors on ajoute du poids à cette arête. Notons  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_n$  la filtration engendrée par ce processus, c'est-à-dire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{F}_n := \sigma(V_{ij}^0, \dots, V_{ij}^n; \{i, j\} \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2)$ .

La probabilité de succès, conditionnellement au passé, pour un couple  $\{i, j\} \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$



au temps  $n$  est alors :

$$\mathbb{P}\left(V_{ij}^{n+1} = V_{ij}^n + 1 | \mathcal{F}_n\right) = \frac{1}{M_1} \times \frac{\left(V_{ij}^n\right)^2}{\left(\sum_{l \in \mathcal{S}_2} V_{il}^n\right) \left(\sum_{k \in \mathcal{S}_1} V_{kj}^n\right)}.$$

Nous avons à présent défini la procédure d'apprentissage. L'apprentissage par renforcement entre dans la classe des modèles d'apprentissage stratégique dans les jeux, tout comme le *no-regret learning* ou encore le *fictitious play* (voir [93]), dans lesquels les joueurs adaptent leur stratégie dans le but (peut-être inconscient) de maximiser leur gain.

L'apprentissage par renforcement correspond à un cas où les joueurs ont un bas degré de rationalité, dans le sens où des stratégies optimales mèneraient sans doute à une procédure plus rapide. C'est en revanche un modèle de comportement social simple et intéressant car il n'est pas utile de supposer que les agents soient totalement dévoués à leur tâche, ou même d'être conscients de faire partie d'un jeu social.

Enonçons à présent quelques résultats. Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$T_n := \sum_{i \in \mathcal{S}_1, j \in \mathcal{S}_2} V_{ij}^n,$$

qui est le nombre de succès (plus  $M_1 \times M_2$ ), et définissons la densité d'occupation  $(x_n)_n = ((x_{ij}^n)_{\{i,j\} \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2})_n$  telle que, pour tout  $\{i, j\} \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ ,

$$x_{ij}^n := \frac{V_{ij}^n}{T_n}, \quad x_i^n := \sum_{j \in \mathcal{S}_2} x_{ij}^n, \quad x_j^n := \sum_{i \in \mathcal{S}_1} x_{ij}^n.$$

Ce processus fut d'abord étudié par Argiento, Pemantle, Skyrms et Volkov [2] dans le cas où  $M_1 = M_2 = 2$ . Pour donner un énoncé simple, notons  $\mathcal{S}_1 = \{1, 2\}$ ,  $\mathcal{S}_2 = \{A, B\}$  et  $x_n = (x_{1A}^n, x_{1B}^n, x_{2A}^n, x_{2B}^n)$

**Théorème 3.1** (Argiento, Pemantle, Skyrms et Volkov, [2]). *Un langage est presque sûrement créé. Plus précisément, la densité d'occupation  $x^n$  converge presque sûrement vers  $(1/2, 0, 0, 1/2)$  ou vers  $(0, 1/2, 1/2, 0)$ , chacun des cas arrivant avec probabilité  $1/2$ .*

Le cas plus général, dans lequel  $M_1$  et  $M_2$  sont des entiers quelconques, fut étudié par Hu, Skyrms et Tarrès [45]. Comme dans [2], ils ont utilisé les algorithmes stochastiques pour démontrer leurs résultats.

Nous allons ici donner une idée de ce que sont les algorithmes stochastiques dont une bonne introduction est proposée par Benaïm [13].

La stratégie consiste à approcher la dynamique d'un certain processus aléatoire (ici ce

## CHAPITRE 1. INTRODUCTION

---

sera  $(x_n)$ ) par celle d'une equation différentielle déterministe.

Plus précisément, on peut calculer la variation moyenne de  $(x_n)$  et écrire :

$$\mathbb{E}(x_{n+1} - x_n | \mathcal{F}_n) = \frac{1}{(1 + T_n)M_1} F(x_n), \quad (3.1)$$

où  $F$  est un certain champ vectoriel défini sur

$$\Delta = \left\{ (x_{ij})_{(i,j) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2} : x_{ij} \geq 0, \forall (i,j) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2, \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2} x_{ij}^n = 1 \right\},$$

mais qui n'est ni continu ni différentiable sur l'ensemble :

$$\partial\Delta := \{x \in \Delta : \exists i \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \text{ s.t. } x_i = 0\},$$

que nous appellerons le bord de  $\Delta$ , bien que ce ne soit pas son bord topologique.

On va considérer l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = F(x). \quad (3.2)$$

Le but est alors d'étudier cette équation, d'en déterminer les équilibres et leur stabilité pour ensuite essayer (en général) de prouver que le processus aléatoire converge vers ces équilibres (stables). On définit l'ensemble des équilibres de (3.2) par

$$\Gamma := \{x : F(x) = 0\}.$$

Supposons que  $T_n$  croît linéairement en  $n$ , alors, par (3.1), l'incrément moyen de  $x_n$  à chaque instant est de l'ordre de  $1/n$ . Pour reprendre les mots de [58] Pemantle : *“this means that  $[x_n]$  does not converge in a trivial manner by having a path of bounded variation, but that the total variance of the increments is finite so that at points where the drift  $F$  disappears,  $[x_n]$  may converge in the manner of a diffusion whose clock converges.”*

D'autre part, nous voulons nous intéresser à la stabilité des équilibres. Nous dirons qu'un équilibre  $q \in \Delta \setminus \partial\Delta$  est stable si les valeurs propres de la jacobienne de  $F$  en  $q$  ont toutes une partie réelle négative ou nulle (voir Chapitre 4). Intuitivement, ceci revient presque à dire : une solution de (3.2) qui démarre près de  $q$  restera dans un voisinage de  $q$  pour toujours.

A tout  $x \in \Delta$ , on associe un graphe biparti  $(\mathcal{G}_x, \overset{x}{\sim})$  sur  $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$  tel que  $i \overset{x}{\sim} j$  si et seulement si  $x_{ij} > 0$ .

Pour tout graphe biparti  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ , on appelle  $(P)_{\mathcal{G}}$  la propriété suivante :

- Soient  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_d$  ses composantes connexes, alors, pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{S}_1$  ou  $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{S}_2$  est un singleton ;
- Tout sommet est adjacent à une arête, au moins.

Le premier point signifie que chaque composante connexe correspond à un synonyme, à une polysémie, ou bien à une correspondance parfaite entre un état et un signal. Le second point signifie qu'aucun signal ni aucun état ne tombe hors d'usage.

Hu, Skyrms et Tarrès [45] ont prouvé que tout équilibre  $x \in \Delta \setminus \Delta$  de (3.2) est stable si et seulement si  $(P)_{\mathcal{G}_x}$  est vérifiée.

Enfin, avant d'énoncer les principaux résultats de [45], définissons le *gain moyen* comme la fonction  $H$  définie sur  $\Delta$  telle que :

$$\mathbb{E}(T_{n+1} - T_n | \mathcal{F}_n) = \frac{1}{M_1} H(x_n).$$

**Théorème 3.2** (Hu, Skyrms et Tarrès [45]).

- *Le gain moyen  $(H(x_n))_n$  converge p.s.*
- *$(x_n)_n$  converge p.s. vers l'ensemble des équilibres  $\Gamma$  de l'équation (3.2).*
- *Pour tout graphe biparti  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$  tel que  $(P)_{\mathcal{G}}$  est vérifiée,  $x_n$  tend avec probabilité strictement positive vers un équilibre stable  $x \in \Delta$  tel que  $\mathcal{G}_x = \mathcal{G}$ .*

Malheureusement, il n'est pas démontré que le processus converge vers une configuration stable avec probabilité 1.

### 3.2 Résultats obtenus en collaboration avec P. Tarrès

Dans cette section, nous allons présenter un modèle qui décrit des dynamiques de relations sociales. Ce travail est issu de [47], article en collaboration avec Pierre Tarrès. Notre modèle est basé, d'une part, sur une hypothèse de réciprocité (on ne peut parler à quelqu'un seulement si celui-ci souhaite également nous parler) et, d'autre part sur une procédure d'apprentissage par renforcement : on aura une plus forte tendance à communiquer avec les individus avec qui on a déjà communiqué auparavant.

De tels modèles ont déjà été proposés par Pemantle et Skyrms [74] : chaque jour, chaque individu choisit un de ses voisins et lui parle, la communication étant toujours acceptée par celui-ci ; puis, ces deux individus renforcent la probabilité de parler ensemble. Dans leur modèle, aucune hypothèse de réciprocité n'est imposée, ce qui le rend très différent du nôtre, dans lequel la communication n'est pas forcément acceptée par le voisin choisi.

L'objectif est alors de savoir quelle sera l'allure asymptotique du graphe des communications : qui communiquera avec qui ? Comme nous allons le voir, les configurations stables correspondent aux cas où le réseau ressemble à un ensemble d'étoiles : chaque

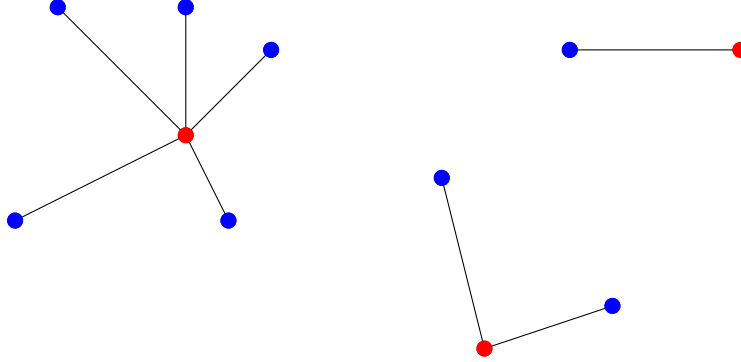


FIGURE 1.8 – Exemple d’une configuration stable

étoile est composée d’un individu central qui communique avec plusieurs autres individus qui eux, en revanche, ne communiquent qu’avec lui (voir Figure 1.8).

Donnons la définition de ce modèle d’apprentissage par renforcement pour les réseaux sociaux et énonçons les résultats obtenus sur celui-ci.

Nous allons définir un processus aléatoire sur un graphe fini, avec des poids. Commençons par donner quelques définitions qui prendront du sens plus loin.

Soit  $G = (\mathbb{V}, E, \sim)$  un graphe fini où  $\mathbb{V}$  est l’ensemble des sommets et où  $E$  est l’ensemble des arêtes non-orientées. De plus, supposons qu’aucun sommet n’est isolé : pour tout  $i \in \mathbb{V}$ , il existe  $j \in \mathbb{V}$  tel que  $\{i, j\} \in E$ , également noté  $i \sim j$ .

Soit  $\mathcal{A} := (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{V}}$  une collection de réels positifs telle que, pour tous  $i, j \in \mathbb{V}$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$  et  $a_{ij} > 0$  si et seulement si  $\{i, j\} \in E$ . La quantité  $a_{ij}$  correspond à l’affinité entre  $i$  et  $j$ . On définit le *réseau*  $G_{\mathcal{A}}$  comme le graphe  $G$  assorti des poids  $\mathcal{A}$ .

Le processus que nous allons définir repose sur un jeu itératif dont les joueurs sont les sommets du réseau  $G_{\mathcal{A}}$ , et dans lequel la *Nature* intervient. Ce jeu est composé d’une infinité de tours, et un tour du jeu est décrit par la procédure suivante :

- Chacun des sommets  $i \in \mathbb{V}$  choisit un de ses voisins ;
- La Nature choisit indépendemment un sous-ensemble  $V \subset \mathbb{V}$  de sommets, autorisés à communiquer ;
- Si  $i, j \in V$ ,  $i \sim j$ , et si  $i$  et  $j$  se sont mutuellement choisis, alors ils communiquent et tous deux reçoivent un gain égal à leur affinité  $a_{ij}$ .

Notons que plusieurs communications peuvent avoir lieu lors d’un unique tour.

A chaque étape, la Nature choisit l’ensemble des sommets autorisés à communiquer selon la manière suivante. Définissons  $\mathcal{P}(\mathbb{V})$  l’ensemble des sous-ensembles de  $\mathbb{V}$ . Soit  $(p_V)_{V \in \mathcal{P}(\mathbb{V})}$  une famille de réels positifs tel que

$$\sum_{V \in \mathcal{P}(\mathbb{V})} p_V = 1.$$

Nous supposons alors que la suite des sous-ensembles  $V_n \in \mathcal{P}(\mathbb{V})$  choisis par la Nature au temps  $n \in \mathbb{N}$  est une suite i.i.d. de variables de Bernoulli sur  $\mathcal{P}(\mathbb{V})$  de probabilités  $(p_V)_{V \in \mathcal{P}(\mathbb{V})}$ .

De plus, supposons que si  $i \sim j$  alors il existe  $V \in \mathcal{P}(\mathbb{V})$  tel que  $i, j \in V$  et  $p_V > 0$ . Cette condition va seulement signifier qu'une communication entre deux sommets voisins est possible (dans le cas contraire, on pourrait alors considérer le même réseau, privé de l'arête  $\{i, j\}$ ).

Les sommets du réseau  $G_{\mathcal{A}}$  représentent des individus et les arêtes les relations entre eux. Les poids  $\mathcal{A}$  sont interprétés comme des affinités entre les individus et les probabilités  $p_V$  comme des propensions à entamer une communication. Ces deux quantités seront importantes par la suite.

Plus précisément, chaque pair de sommets  $\{i, j\}$  attribue un poids initial  $v_{ij}^0 \geq 0$  à leur relation. Chaque fois qu'ils communiquent ensemble avec succès, ils ajoutent un poids  $a_{ij}$  à cette relation. Les poids  $a_{ij}$  indiquent donc à quel point les individus s'apprécient. Nous supposons ici que cette relation est symétrique, c'est-à-dire  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Le jeu de réseau est à présent bien défini. Décrivons comment les individus se choisissent les uns les autres. Nous allons ici suivre une procédure d'apprentissage par renforcement dans laquelle les agents auront plus tendance à utiliser les stratégies qui ont été efficaces par le passé, ce qui, ici, peut se résumer par : *au plus un agent a communiqué avec quelqu'un, au plus il aura tendance à lui parler de nouveau.*

Le processus aléatoire se déroule comme suit. A chaque instant, on réalise un tour du jeu décrit précédemment.

Pour tous  $i, j \in \mathbb{V}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $V_{ij}^n = V_{ji}^n$  le gain cumulé du couple  $ij$  au temps  $n$ , que l'on initialise par  $V_{ij}^0 = v_{ij}^0 \geq 0$  tel que  $v_{ij}^0 > 0$  si et seulement si  $i \sim j$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit le gain cumulé du sommet  $i$  par :

$$V_i^n := \sum_{j \in \mathbb{V}: j \sim i} V_{ij}^n, \text{ pour tout } i \in \mathbb{V},$$

La Nature commence par choisir un sous-ensemble  $V \in \mathcal{P}(\mathbb{V})$ , avec probabilité  $p_V$ . Pour un couple  $ij$ , la probabilité d'avoir été choisi est :

$$p_{ij} := \sum_{V \in \mathcal{P}(\mathbb{V}): i, j \in V} p_V.$$

Ensuite, chaque sommet  $i_0 \in \mathbb{V}$  choisit un de ses voisins  $j_0 \sim i_0$  avec probabilité :

$$\frac{V_{i_0 j_0}^n}{V_{i_0}^n}.$$

## CHAPITRE 1. INTRODUCTION

---

De la même façon,  $j_0$  choisit un sommet  $i_1 \sim j_0$  parmi ses voisins avec probabilité :

$$\frac{V_{i_1 j_0}^n}{V_{j_0}^n}.$$

Enfin, on incrémente les gains de la manière suivante :

$$V_{i_0 j_0}^{n+1} := \begin{cases} V_{i_0 j_0}^n + a_{i_0 j_0} & \text{si } i_1 = i_0 \text{ et } i_0, j_0 \in V; \\ V_{i_0 j_0}^n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_n)_n$  la filtration engendrée par le processus, c'est-à-dire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{F}_n := \sigma(V_{ij}^0, \dots, V_{ij}^n; i, j \in \mathbb{V})$ .

La probabilité de succès sur  $ij \in E$  est alors :

$$\mathbb{P} \left( V_{ij}^{n+1} = V_{ij}^n + a_{ij} \mid \mathcal{F}_n \right) = p_{ij} \frac{(V_{ij}^n)^2}{V_i^n V_j^n}.$$

**Remarque 3.3.** Nous pouvons dès à présent voir que le Signaling game avec apprentissage par renforcement est un cas particulier de ce modèle. En effet, on peut se placer dans le cadre d'un graphe biparti complet, avec  $\mathbb{V} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$  et  $a_{ij} = \mathbb{1}_{\{i \in \mathcal{S}_1, j \in \mathcal{S}_2\}}$ . Il faut également choisir  $p_V = 1/|\mathcal{S}_1|$ , pour tout  $V = \{i\} \cup \{j\}$  pour un certain  $i \in \mathcal{S}_1$ .

Les techniques utilisées ici sont identiques à celles introduites dans la section précédente. Afin d'énoncer nos résultats, définissons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} T_n &:= \sum_{i,j \in \mathbb{V}} V_{ij}^n, \\ x_{ij}^n &:= \frac{V_{ij}^n}{T_n}, \text{ pour tout } i, j \in \mathbb{V}, \\ x_i^n &:= \frac{V_i^n}{T_n} = \sum_{j \in \mathbb{V}: j \sim i} x_{ij}^n, \text{ pour tout } i \in \mathbb{V}, \end{aligned}$$

et notons que  $\sum_{i,j} x_{ij}^n = 1$ .

Nous appellerons  $x_n := (x_{ij}^n)_{i,j \in \mathbb{V}}$  la *mesure d'occupation* au temps  $n$ , qui a valeurs dans le simplex :

$$\Delta := \left\{ (x_{ij})_{i,j \in \mathbb{V}} : \sum_{i,j \in \mathbb{V}} x_{ij} = 1, \text{ où } x_{ij} = x_{ji} \geq 0, \text{ et } x_{ij} = 0 \text{ si } i \not\sim j \right\}.$$

Par un abus de langage, bien que ce ne soit pas le bord topologique, nous appellerons *bord* de ce simplex l'ensemble :

$$\partial \Delta := \left\{ x \in \Delta : \exists i \in \mathbb{V} \text{ t.q. } x_i = \sum_{j \in \mathbb{V}} x_{ij} = 0 \right\}.$$

Intuitivement, ceci correspond au cas où un individu tombe *hors d'usage*, ce qui signifie qu'il ne communique plus avec personne.

L'objectif est alors d'obtenir un résultat similaire au Théorème 3.2. Ainsi, nous allons définir le *gain moyen*. Pour cela, commençons par remarquer que :

$$\mathbb{E}(T_{n+1} - T_n | \mathcal{F}_n) = \sum_{i,j \in \mathbb{V}} a_{ij} p_{ij} \frac{(x_{ij}^n)^2}{x_i^n x_j^n}.$$

Le gain moyen est la fonction  $H$  qui à tout  $x \in \Delta \setminus \partial\Delta$  associe :

$$H(x) = \sum_{i,j \in \mathbb{V}} a_{ij} p_{ij} \frac{(x_{ij})^2}{x_i x_j}.$$

Notons que nous pouvons démontrer que  $H$  est minorée, sur  $\Delta$ , par une constante strictement positive. Ceci, par une généralisation de la version conditionnelle du Lemme de Borel-Cantelli, implique que  $(T_n/n)$  converge et donc que  $T_n$  a asymptotiquement une croissance linéaire.

Les techniques utilisées sont très similaires à celle de [45]. Nous allons donc utiliser des méthodes d'algorithmes stochastiques. La stratégie consiste à étudier la dynamique de la densité d'occupation  $(x_n)$  et de l'approcher par une dynamique déterministe, guidée par une équation différentielle dont nous pouvons étudier les équilibres. Il est possible de démontrer que, pour tous  $i, j \in \mathbb{V}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{E}(x_{ij}^{n+1} - x_{ij}^n | \mathcal{F}_n) = \frac{x_{ij}^n}{T_n} \left( a_{ij} p_{ij} \frac{x_{ij}^n}{x_i^n x_j^n} - H(x_n) \right) - R_n^{ij},$$

où  $R_n^{ij}$  est l'espérance conditionnelle d'un processus sommable, que l'on peut alors négliger.

On peut alors approcher l'évolution de  $(x_n)$  par celle induite par l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \tag{3.3}$$

où  $F$  est la fonction, de  $\Delta$  dans  $T\Delta$ , l'espace tangent à  $\Delta$ , qui à  $x$  associe

$$F(x) = \left[ x_{ij} \left( a_{ij} p_{ij} \frac{x_{ij}}{x_i x_j} - H(x) \right) \right]_{i,j \in \mathbb{V}},$$

avec la convention que  $F(x)_{ij} = 0$  si  $x_{ij} = 0$ . On définit l'ensemble des équilibres de (3.3) par :

$$\Gamma := \{x \in \Delta : F(x) = 0\}.$$

## CHAPITRE 1. INTRODUCTION

---

Nous voulons alors étudier (3.3) et en particulier en déterminer les équilibres, en précisant leur stabilité. Nous renvoyons le lecteur à la section précédente ou au Chapitre 4 pour une définition d'un équilibre stable.

L'étude des équilibres passe par l'étude de la matrice Jacobienne de  $F$ , c'est-à-dire sa dérivée. Un problème important est que  $F$  n'est pas différentiable sur le bord du simplexe  $\Delta$ . Ainsi, on ne pourra uniquement l'étudier sur  $\Delta \setminus \partial\Delta$ , l'intérieur du simplexe.

D'autre part, il sera utile de démontrer que la fonction  $H$  est une fonction de Lyapounov pour la dynamique (3.3).

Nous allons à présent énoncer les résultats. Fixons un réseau  $G_{\mathcal{A}}$ . Alors, à tout  $x \in \Delta$ , on associe un réseau  $(\mathcal{G}_x, \overset{x}{\sim})$  sur  $\mathbb{V}$ , qui hérite des poids  $\mathcal{A}$ , et tel que, pour tous  $i, j \in \mathbb{V}$ ,  $i \overset{x}{\sim} j$  si  $x_{ij} > 0$ .

D'autre part, on dit qu'un réseau  $\mathcal{G}$ , avec des composantes connexes  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_d$ , vérifie la propriété  $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}$  si :

- Pour tout  $m \in \{1, \dots, d\}$ ,  $a_{ij}p_{ij} = a_{kl}p_{kl}$ , pour tous  $i, j, k$  et  $l$  dans  $\mathcal{C}_m$  ;
- Pour tout  $m \in \{1, \dots, d\}$ ,  $\mathcal{C}_m$  a au plus un sommet qui possède plusieurs voisins ;
- Tout sommet est adjacent à au moins une arête.

On peut alors montrer que les seuls équilibres  $x \in \Delta \setminus \partial\Delta$  qui sont stables sont ceux pour lesquels  $\mathcal{P}_{\mathcal{G}_x}$  est vérifiée. Le second point établit la structure en étoiles du réseau  $\mathcal{G}$ , tandis que le premier point impose une certaine uniformité et le troisième point exclut les équilibres qui sont sur le bord de  $\Delta$ .

Voici les principaux résultats qui ont été obtenus en collaboration avec P. Tarrès.

**Théorème 3.4** (K., Tarrès, [47]).

- *Le processus du gain moyen  $(H(x_n))_n$  converge presque sûrement ;*
- *Presque sûrement,  $x_n$  converge vers l'ensemble des équilibres  $\Gamma$  de (3.3) ;*
- *Pour tout graphe  $\mathcal{G}$  sur  $\mathbb{V}$  tel que  $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}$  est vérifiée,  $x_n$  tend avec probabilité strictement positive vers un équilibre  $x$  tel que  $\mathcal{G}_x = \mathcal{G}$ .*

Notons que, pour le troisième point, seules les arêtes dont la densité d'occupation ne converge pas vers 0 connaissent une infinité de communications.

Ici encore, nous ne sommes malheureusement pas capables d'affirmer que le processus  $(x_n)$  converge p.s. ni qu'il ne peut converger uniquement vers des équilibres stables. Dans le cas où tous les poids sont identitiques, nous pensons que le processus  $(x_n)$  reste dans  $\Delta \setminus \partial\Delta$ , et alors nous ne serions pas intéressés par ce qui se passe sur le bord. En revanche, lorsque les poids sont différents, nous avons un exemple dans lequel le processus converge p.s. vers un point de  $\partial\Delta$  déterministe (voir [47] ou Chapitre 4).

Il pourrait être intéressant d'étudier les dynamiques d'autres grandeurs que la densité d'occupation, qui pourraient être plus facilement décrites sur  $\partial\Delta$ . On pourrait par



exemple étudier un autre système de coordonnées et approcher une dynamique lisse, connue sous le nom de dynamique de réplicateur ajustée ou version de Maynard-Smith, voir [5, 44]. Cependant, le processus prendrait des valeurs dans un domaine non-borné, ce qui amènerait d'autres difficultés techniques.



# 2

## Stuck Walks : a conjecture of Erschler, Tóth and Werner

In this paper, we work on a class of self-interacting nearest neighbor random walks, introduced in [38], for which there is competition between repulsion of neighboring edges and attraction of next-to-neighboring edges. Erschler, Tóth and Werner proved in [38] that, for any  $L \geq 1$ , if the parameter  $\alpha$  belongs to a certain interval  $(\alpha_{L+1}, \alpha_L)$ , then such random walks localize on  $L + 2$  sites with positive probability. They also conjectured that it is the almost sure behavior. We prove this conjecture partially, stating that the walk localizes on  $L + 2$  or  $L + 3$  sites almost surely, under the same assumptions. We also prove that, if  $\alpha > 1$ , then the walk localizes a.s. on 3 sites.

## 1 Introduction

Let  $X := (X_n)_{n \geq 0}$  be a nearest neighbor walk on the integer lattice  $\mathbb{Z}$ . Let  $l_k(j)$  be the local time on the non-oriented edge  $\{j-1, j\}$  up to time  $k$  :

$$l_k(j) = \sum_{m=1}^k \mathbb{1}_{\{X_{m-1}, X_m\} = \{j-1, j\}}.$$

Define the filtration  $(\mathcal{F}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  generated by the process, i.e., for all  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{F}_k = \sigma(X_0, \dots, X_k)$ .

Fix a real parameter  $\alpha$  and define the following linear combination of local times on neighboring and next-to-neighboring edges of a site  $j$  :

$$\Delta_k(j) = -\alpha l_k(j-1) + l_k(j) - l_k(j+1) + \alpha l_k(j+2), \quad (1.1)$$

and, with a slight abuse of notation,

$$\Delta_k := \Delta_k(X_k).$$

Fix another real parameter  $\beta > 0$ . In this paper, we consider the walk introduced in [38], defined by  $X_0 = 0$  and the following conditional transition probability :

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = X_k \pm 1 | \mathcal{F}_k) = \frac{e^{\pm \beta \Delta_k}}{e^{-\beta \Delta_k} + e^{\beta \Delta_k}}. \quad (1.2)$$

The linear combination  $\Delta_k$  can be seen as the *local stream* felt by the walker. When this stream is positive (resp. negative), the walk bends toward the right (resp. toward the left). The value of the parameter  $\beta$  does not affect very much the behavior of the walk, whereas the value of  $\alpha$  plays a crucial role, as we explain below.

This model is a generalization of the true self-repelling walk (TSRW) in one dimension. We can recover the TSRW with edge repulsion, by choosing  $\alpha = 0$ , as well as the TSRW with site repulsion, by choosing  $\alpha = -1$ . In the case of edge repulsion, a non-degenerate scaling limit for  $X_k/k^{2/3}$  is proved in [86] and the same scaling limit is conjectured for site repulsion, we refer the reader to [1, 88] for more details. Some interesting work has also been done concerning the continuous-time true self-repelling motion, see for instance [28, 29, 89].

A scaling behavior similar to the one of the edge-repelled TSRW is expected for  $\alpha \in [-1, 1/3]$ . Roughly speaking,  $\alpha$  is then sufficiently close to 0 and this can be seen as a perturbation of the TSRW. The case  $\alpha = 1/3$  is more mysterious, and the non-degenerate scaling of the walk might be like  $k^{2/5}$ . For  $\alpha \in (-\infty, -1)$ , the walker is repelled by its neighboring edges and even more strongly by its next-to-neighboring edges. In this case, it seems that the walk self-builds trapping environments, which causes a slowing down

of the walk. We refer the reader to [37] for more detailed discussions and arguments.

In [38], Erschler, Tóth and Werner focus on the case where  $\alpha > 1/3$ . In particular, the walker is repelled by its neighboring edges and attracted by its next-to-neighboring edges. Therefore, there is competition between repulsion and attraction : the last one might win, resulting in localization of the walk on an arbitrarily large interval depending on  $\alpha$ .

More precisely, let us define subintervals of  $(1/3, +\infty)$  corresponding, as we will see later, to different possible features of the walk.

Define the sequence  $(\alpha_L)_{L \geq 1}$  by  $\alpha_1 = +\infty$  and for all  $L \geq 2$  :

$$\alpha_L = \frac{1}{1 + 2 \cos(\frac{2\pi}{L+2})}, \quad (1.3)$$

so that this sequence decreases from  $+\infty$  to  $1/3$ .

Define, for all  $k \in \mathbb{N}$  and  $j \in \mathbb{Z}$ , the number of visits to the site  $j$ , up to time  $k$  :

$$Z_k(j) = \sum_{m=1}^k \mathbb{1}_{\{X_m=j\}} = \frac{l_k(j) + l_k(j+1) + \mathbb{1}_{\{X_k=j\}} - \mathbb{1}_{\{j=0\}}}{2},$$

and let  $Z_\infty(j)$  be its limit when  $k$  goes to infinity. Let  $R$  (resp.  $R'$ ) be the set of points that are visited at least once (resp. infinitely often), i.e.,

$$\begin{aligned} R &= \{j \in \mathbb{Z} : Z_\infty(j) > 0\}, \\ R' &= \{j \in \mathbb{Z} : Z_\infty(j) = \infty\}. \end{aligned}$$

In [38], the authors prove the following result :

**Théorème 1.1** (Erschler, Tóth and Werner, [38]). *Suppose that  $L \geq 1$ . We have :*

- *If  $\alpha < \alpha_L$ , then, almost surely,  $|R'| \geq L + 2$ , or  $R' = \emptyset$ ;*
- *If  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$ , then the probability that  $|R'| = L + 2$  is positive.*

*Moreover, there exists a deterministic real valued vector  $(l_1, \dots, l_{L+1})$ , such that, on the event  $\{R' = \{x, x+1, \dots, x+L+1\}\}$ , we almost surely have the following law of large numbers :*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} (l_k(x+1), \dots, l_k(x+L+1)) = (l_1, \dots, l_{L+1}).$$

**Remarque 1.2.** *As in [38], we will give an explicit form for the vector  $(l_1, \dots, l_{L+1})$  later in this paper, see Proposition 4.1.*

Erschler, Tóth and Werner also propose the following conjecture :

**Conjecture 1.3** (Erschler, Tóth and Werner, [38]). *If  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$ , then  $|R'| = L + 2$  almost surely.*

## CHAPITRE 2. STUCK WALKS

---

The main goal of this paper is to prove the following result, which partially settles the conjecture.

**Théorème 1.4.** *Assume that  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$ , then the walk localizes on  $L + 2$  or  $L + 3$  sites almost surely, i.e.  $|R'| \in \{L + 2, L + 3\}$  a.s.*

We also give, in both cases, the asymptotic behavior of the local times, which correspond to those obtained in [38], see Proposition 4.1.

When  $\alpha > 1$ , i.e.  $\alpha \in (\alpha_2, \alpha_1)$ , we can improve this result and prove the conjecture in this case, which is done in Section 7.

**Théorème 1.5.** *Assume that  $\alpha \in (1, +\infty)$ , then the walk localizes on 3 sites almost surely, i.e.  $|R'| = 3$  a.s.*

Besides, we also believe that, for general  $\alpha > 1/3$  and  $L \geq 1$  such that  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$ , the event  $|R'| = L + 3$  does not occur as it corresponds to an unstable limiting behavior.

Another problem is the one of the critical values of  $\alpha$ , that is not treated here, neither in [38]. Nevertheless, Erschler, Tóth and Werner give good arguments to make us believe that, if  $\alpha = \alpha_{L+1}$ , then the walk will almost surely not be stuck on  $L + 2$  sites, see the concluding remarks of [38].

Note also that it is usually quite challenging to obtain an almost sure behavior for a reinforced random walk and let us mention some interesting results. Tarrès proved in [83] the localization on 5 sites of the vertex-reinforced random walk (VRRW) with linear reinforcement, which is an important result in the field of reinforced random walks. In [84], Tarrès proposed another proof of this result, introducing a variant of so-called Rubin's construction, allowing powerful couplings. This variant was also used by Basdevant, Schapira and Singh who proved in [4] a phase transition of the behavior of VRRWs, for non-decreasing weight functions of order  $n \log \log n$ . The same authors, in [3], characterize sub-linear non-decreasing weight functions thanks to an index and they prove an a.s. lower bound for the size of the localization set (which is not sharp), depending on this index. They propose a conjecture with better bounds, which they prove with positive probability. In particular, they exhibit walks that localize on arbitrarily large intervals, as we do in the present paper. The major difference between the behaviors of Stuck Walks and VRRWs is that in the case of VRRWs on  $\mathbb{Z}$ , only 3 vertices are visited during a positive proportion of the total time, and the other infinitely visited sites are seldom visited.

## 2 Sketch of the proof of Theorem 1.4

Let us describe the techniques used to prove Theorem 1.4. First, as in [38], we compare the local times of the walk to the solutions of a linear system. This linear system

is not easy to handle generally but we prove additional results on the solutions of this system, in order to generalize some results of [38] and to emphasize, through trigonometric identities, instability properties of some vertices that will force the walk to localize on one of their sides. Finally, we adapt a variant of Rubin's construction, introduced in [84], to a class of *non-monotonic* weight functions.

Fix  $L \geq 1$ , and assume that  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$ . Let us first state the following proposition, proved in Section 5.

**Proposition 2.1.** *The walk almost surely visits finitely many sites, i.e.  $|R| < +\infty$  a.s.*

Note that this last proposition discards the possibility of transience of the walk, i.e.  $R' \neq \emptyset$  a.s.

Knowing from [38] that  $|R'| \geq L + 2$  a.s., our next goal is to prove that  $|R'| \leq L + 3$ . Then, let  $x \in \mathbb{Z}$  be the leftmost infinitely visited site, and let  $K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  be the number of *interior* lattice sites of  $R'$ , i.e.

$$\begin{aligned} x &= \inf\{y \in \mathbb{Z} : y \in R'\}, \\ K &= |R'| - 2, \end{aligned}$$

Note that  $x$  and  $K$  are random variables but that they can take only countably many values, so we can fix  $x \in \mathbb{Z}$  and  $K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  and work on the event  $\{R' = \{x, x+1, \dots, x+K+1\}\} = \{x = \inf R'\} \cap \{|R'| = K+2\}$ .

The following result, proved in Section 6, is crucial.

**Proposition 2.2.** *Let  $x \in \mathbb{Z}$  and let  $K \in \mathbb{N}$ . Almost surely, we have :*

$$\{R' = \{x, \dots, x+K+1\}\} \subset \bigcap_{j=x+1}^{x+K} \left\{ \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\Delta_k(j)}{k} = 0 \right\}.$$

The last Proposition is a generalization of Proposition 2 of [38], which would only give us this result for  $K \leq L$ , which is not sufficient. Hence, Proposition 2.2 requires a more technical proof, which needs, in particular, results of Section 4.4.

From Proposition 2.2, we know that the normalized local times eventually approach the set of solutions  $(l_0, \dots, l_{K+2})$  of the linear system defined by :

$$d_1 = d_2 = \dots = d_K = 0 \text{ and } \sum_{j=1}^{K+1} l_j = 1,$$

where, for all  $j \in \{1, \dots, K\}$ ,  $d_j = -\alpha l_{j-1} + l_j - l_{j+1} + \alpha l_{j+2}$ , and with the extra conditions  $l_0 = l_{K+2} = 0$ .

So, all the information we can get about this system gives us information about the

## CHAPITRE 2. STUCK WALKS

---

asymptotic behavior of the local times. The sole purpose of Section 4 is to study this generalized Fibonacci sequence and its solutions. In fact, we also use some properties of the solutions of this system to prove Proposition 2.1 and Proposition 2.2.

Let us roughly describe the solutions of such a system, which is detailed in Section 4. First, define  $d_0 = -l_1 + \alpha l_2$  and  $d_{K+1} = -\alpha l_K + l_{K+1}$ .

If  $K < L$ , then the solution to the system is unique, all the  $l_j$ 's are positive,  $d_0$  is negative and, by symmetry,  $d_{K+1} = -d_0 > 0$ . As  $\Delta_k(x)/k$  and  $\Delta_k(x + K + 1)/k$  respectively approach  $d_0$  and  $d_{K+1}$  as  $k$  goes to infinity, it gives us the intuition that we cannot have  $|R'| < L + 2$ , since otherwise the local streams at the bounds would strongly push the walker out of this interval.

If  $K = L$ , then the solution is still unique, with all the  $l_j$ 's positive, and we have  $d_0 = -d_{L+1} > 0$ . So, we guess that  $|R'| = L + 2$  is a good candidate, as the local streams on the bounds would keep the walker inside the interval.

If  $K = L + 1$ , the unique solution is similar to the previous one, which makes  $|R'| = L + 3$  another good candidate.

Otherwise, if  $K > L + 1$ , the solutions of the system are not necessarily unique, and we cannot determine *a priori* the sign of  $d_0$  nor  $d_{K+1}$ . Moreover, as it is noticed in [38], see also Remark 4.4, we could find many  $K$ 's for which the set of solutions to the system is such that all the  $l_j$ 's are non-negative,  $d_0 > 0$  and  $d_{K+1} < 0$ , i.e. that the local streams on the bounds push the walker inward. In other words, we could find many good candidates for the size of  $R'$ . The goal is then to exclude these larger values of  $K$ .

Recall that  $L \geq 1$  and that  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$ , so that  $\alpha > 1/3$ . Let  $\omega \in (0, \pi)$  be the unique real number such that :

$$\cos(\omega) = \frac{1 - \alpha}{2\alpha}.$$

The following lemma is a bit less general than Proposition 4.7 which we state and prove in Section 4.4. As we have already noticed, the linear system is quite difficult to handle when  $K$  is large, but we can prove some useful results under some convenient assumptions.

**Lemme 2.3.** *Assume that  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$  and  $K \geq L$ . If  $(l_0, \dots, l_{K+2})$  satisfies the previous system and if  $l_1, \dots, l_{K+1} \geq 0$ , then :*

(i)  $d_0 \geq c(K)$  and  $d_{K+1} \leq -c(K)$ , where  $c(K)$  is a positive constant depending only on  $\alpha$  and  $K$ .

(ii) for the same positive constant  $c(K)$ , we have

$$l_{L+2} - \alpha l_{L+1} = -\frac{\sin(\frac{L+2}{2}\omega)}{\sin(\frac{L}{2}\omega)} l_1 + 2\alpha \frac{\cos(\frac{\omega}{2}) \sin(\frac{L+3}{2}\omega)}{\sin(\frac{L}{2}\omega)} l_{L+1} \leq -c(K).$$



The first point is used to prove Proposition 2.2, whereas the second point is used to prove the following series convergence.

**Lemme 2.4.** *Let  $x, K \in \mathbb{Z}$  such that  $K \geq L$ . Then, almost surely, for any  $a > 0$ ,*

$$\{R' = \{x, \dots, x + K + 1\}\} \subset \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} e^{a\beta[l_k(x+L+2) - \alpha l_k(x+L+1)]} < +\infty \right\}.$$

Its proof is simple but needs several technical details to be rigorous, thus it is set forth in Section 6.2 : we use that, on the event  $\{R' = \{x, \dots, x + K + 1\}\}$ , the vector of local times  $(l_k(x), \dots, l_k(K + 2))/k$  approaches, as  $k$  goes to infinity, the set of solutions to the linear system introduced in the previous paragraph.

To prove Theorem 1.4 we adapt a variant of Rubin's construction, which consists of an embedding of the original walk into a continuous-time process obtained via a time-line construction. Due to an idea of Herman Rubin, it was first used by Davis [24] and Sellke [69] for edge-reinforced random walk. Tarrès [84] introduced a variant of this time-line construction for VRRW with non-decreasing *weight function*. This variant involves powerful *monotonicity properties* of the construction and seems to be efficient for a large class of reinforced random walks.

Here, the model we study does not fulfill the conditions of the previous results and, in particular, we do not have any monotonic weight function. We are going to adapt the method of [84] to the case of Stuck Walks, which will enable us to eliminate the large instable intervals as candidates for the localization set.

Let us take advantage of some different ways to write the probability for the walker to jump on his left when he is on a certain vertex :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{k+1} = X_k - 1 | \mathcal{F}_k) &= \frac{1}{1 + e^{2\beta\Delta_k}} \\ &= \frac{e^{2\beta[-l_k(X_k) + \alpha l_k(X_k - 1)]}}{e^{2\beta[-l_k(X_k) + \alpha l_k(X_k - 1)]} + e^{2\beta[-l_k(X_k + 1) + \alpha l_k(X_k + 2)]}}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

It is worth noticing that (2.1) consists of two terms : one depending only on the local times on edges on the left of the considered vertex and the second one depending only on the local times on edges on the right of it. Hence, after one excursion on the right, or on the left, of this vertex, only one of the two terms changes. Note that we still do not have any monotonicity.

Before making this construction more precise, let us introduce some definitions. First, for all  $y \in \mathbb{Z}$  and  $k \in \mathbb{N}$ , define the number of times the *oriented* edge  $(y, y \pm 1)$  has been crossed, up to time  $k$  :

$$N_k(y, y \pm 1) = \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{1}_{\{X_n = y, X_{n+1} = y \pm 1\}},$$

## CHAPITRE 2. STUCK WALKS

---

and notice that if  $X_k = y$  then we have :

$$\begin{aligned} Z_k(y \pm 1) &= \frac{l_k(y + \frac{1 \pm 1}{2}) + l_k(y + \frac{1 \pm 3}{2}) - \mathbb{1}_{\{y \pm 1 = 0\}}}{2}, \\ N_k(y, y \pm 1) &= \frac{l_k(y + \frac{1 \pm 1}{2}) - \mathbb{1}_{\{\pm y < 0\}}}{2}. \end{aligned}$$

Define two functions  $f^+$  and  $f^-$  from  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$  in  $\mathbb{R}^+$ , and a function  $w$  from  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  to  $\mathbb{R}^+$ , such that, for all  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  and  $y \in \mathbb{Z}$ ,

$$f^\pm(y, n) = \exp\left(2\beta\left[2(1+\alpha)n - \alpha\mathbb{1}_{\{y \pm 1 = 0\}} + (1+\alpha)\mathbb{1}_{\{\pm y < 0\}}\right]\right), \quad (2.2)$$

$$w(n) = \exp(4\beta\alpha n). \quad (2.3)$$

Then, if  $X_k = y$ , we have

$$e^{2\beta[-l_k(y+1)+\alpha l_k(y+2)]} = \frac{w(Z_k(y+1))}{f^+(y, N_k(y, y+1))}, \quad (2.4)$$

$$e^{2\beta[-l_k(y)+\alpha l_k(y-1)]} = \frac{w(Z_k(y-1))}{f^-(y, N_k(y, y-1))}, \quad (2.5)$$

hence, using (2.1),

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_{k+1} = X_k - 1 | \mathcal{F}_k) \\ &= \frac{\frac{w(Z_k(X_k-1))}{f^-(X_k, N_k(X_k, X_k-1))}}{\frac{w(Z_k(X_k-1))}{f^-(X_k, N_k(X_k, X_k-1))} + \frac{w(Z_k(X_k+1))}{f^+(X_k, N_k(X_k, X_k+1))}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Now, we are going to use Rubin's construction, which is the following. Recall that, in our case, the function  $w$  is defined as in (2.3), but this construction can be done for any non-decreasing weight function. The way we present this construction is very similar to the one in [4]. We will embed the walk into a continuous-time process, involving time-lines corresponding to sequences of clocks. More precisely, fix a collection of positive real numbers :

$$\xi := (\xi_k^\pm(y), y \in \mathbb{Z}, k \geq 0) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}.$$

We call  $\mathcal{M}$  the function which maps a collection of positive real numbers  $\xi$  to a continuous-time walk  $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_t)_{t \in \mathbb{R}_+} := \mathcal{M}(\xi)$  on  $\mathbb{Z}$ , constructed as follows. For each  $y \in \mathbb{Z}$  and  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , the value  $\xi_k^+(y)$  (resp.  $\xi_k^-(y)$ ) will be related to the duration of a clock attached to the oriented edge  $(y, y+1)$  (resp.  $(y, y-1)$ ), and given the collection  $\xi$ , the evolution of the walk is deterministic, created as follows :

- Set  $\widetilde{X}_0 = 0$  and attach two clocks to the oriented edges  $(0, -1)$  and  $(0, 1)$  ringing respectively at times  $\xi_0^-(0)/w(0)$  and  $\xi_0^+(0)/w(0)$ .

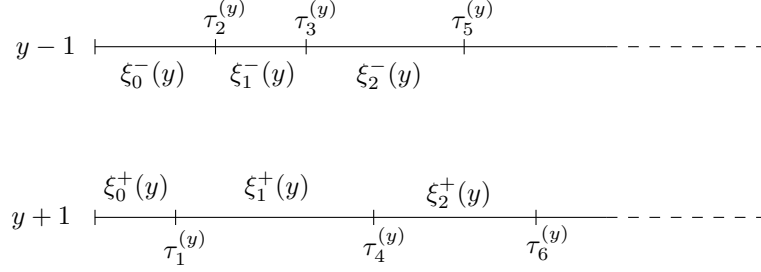


FIGURE 2.1 – Time-lines around a vertex  $y$ . The times  $\tau_k^{(y)}$  are times of jumps from  $y$  to  $y \pm 1$

- At time  $\tau_1 := (\xi_0^-(0)/w(0)) \wedge (\xi_0^+(0)/w(0))$ , one of the alarms rings, then the walker crosses instantaneously the corresponding edge and both clocks are stopped. Then, we have set  $\widetilde{X}_{\tau_1} = \pm 1$  depending on which clock has rung first. If both clocks ring at the same time, then  $\widetilde{X}$  stays at 0 forever and we say that the construction fails.

Now, assume that we have constructed  $\widetilde{X}$  up to some time  $t > 0$  at which time the process makes a right jump from  $y-1$  to  $y$ , for some vertex  $y \in \mathbb{Z}$ . Denote by  $k$  the number of jumps from  $y$  to  $y-1$  and by  $n$  the number of visits to  $y-1$  before time  $t$ . We continue the construction according to the following procedure :

- Start a new clock attached to the oriented edge  $(y, y-1)$ , which will ring after a time  $\xi_k^-(y)/w(n)$ .
- If the walker has already been in  $y$  previously, then restart the clock attached to the oriented edge  $(y, y+1)$  that has been stopped (without ringing) the last time the process left  $y$ . Otherwise, start a new clock for  $(y, y+1)$  which will ring after a time  $\xi_0^+(y)/w(0)$ .
- When one of the alarms rings, the walker crosses instantaneously the corresponding edge, and both clocks are stopped. If both alarms ring simultaneously, then  $\widetilde{X}$  stays at  $y$  forever and we say that the construction fails.

We follow the symmetric procedure when the process jumps from  $y+1$  to  $y$ .

Let us naturally adopt the notations  $\widetilde{\mathcal{F}}_t, \widetilde{l}_t(y), \widetilde{N}_t(y, y \pm 1), \widetilde{Z}_t(y), \widetilde{R}'$  inherited from  $\mathcal{F}_k, l_k(y), N_k(y, y \pm 1), Z_k(y), R'$ .

Let us define  $\tau_0 := 0$  and  $\tau_k$  the time of the  $k$ -th jump of  $\widetilde{X}$ . Then, define the discrete-time *embedded walk*  $(\widetilde{X}_{\tau_k})_k$ .

As it is noticed in [84] we can recover, from this construction, the law of a VRRW with weight  $w$  by choosing  $\xi$  to be a collection of independent exponential random variables with mean 1.

Here, the dynamics are different from those of a VRRW, but recalling the definitions

## CHAPITRE 2. STUCK WALKS

---

(2.2) of  $f^\pm$ , (2.3) of  $w$ , and the transition probability (2.6), we prove the following proposition.

**Proposition 2.5.** *Choose  $\xi$  to be such that, for all  $y \in \mathbb{Z}$  and  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\xi_k^\pm(y)$  are exponential random variables, independent from each other, and with mean  $f^\pm(y, k)$ . Define the continuous-time walk  $\widetilde{X} := \mathcal{M}(\xi)$  and its embedded walk  $(\widetilde{X}_{\tau_k})$ . Then the construction of  $\widetilde{X}$  does not fail with probability 1. Moreover, the processes  $(\widetilde{X}_{\tau_k})_{k \geq 0}$  and  $(X_k)_{k \geq 0}$  have the same distribution.*

*Démonstration.* Recall that if  $U$  and  $V$  are two independent exponential random variables of parameter  $u$  and  $v$  (i.e with mean  $1/u$  and  $1/v$ ), then  $\mathbb{P}(U < V) = u/(u + v)$  and  $\mathbb{P}(U = V) = 0$ .

Then, it suffices to recall (2.6) and to notice that, conditionally on  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\tau_k}$ , the quantities  $\xi_{\widetilde{N}_{\tau_k}(\widetilde{X}_{\tau_k}, \widetilde{X}_{\tau_k} \pm 1)}^\pm(y)/w(\widetilde{Z}_{\tau_k}(\widetilde{X}_{\tau_k} \pm 1))$  are independent exponential random variables with respective means

$$\frac{f^+(\widetilde{X}_{\tau_k}, \widetilde{N}_{\tau_k}(\widetilde{X}_{\tau_k}, \widetilde{X}_{\tau_k} + 1))}{w(\widetilde{Z}_{\tau_k}(\widetilde{X}_{\tau_k} + 1))} \quad \text{and} \quad \frac{f^-(\widetilde{X}_{\tau_k}, \widetilde{N}_{\tau_k}(\widetilde{X}_{\tau_k}, \widetilde{X}_{\tau_k} - 1))}{w(\widetilde{Z}_{\tau_k}(\widetilde{X}_{\tau_k} - 1))}.$$

□

Until the end of this section, we work with  $\xi$  defined as in this last Proposition, which then implies that  $(\widetilde{X}_k)_k$ ,  $(\widetilde{Z}_{\tau_k}(y))_{k,y}$ ,  $(\widetilde{l}_{\tau_k}(y))_{k,y}$  and  $\widetilde{R}'$  have the same laws as  $(X_k)$ ,  $(Z_k(y))$ ,  $(l_k(y))$  and  $R'$ .

Define, for each  $y \in \mathbb{Z}$ , the total time consumed by the clocks attached to the oriented edge  $(y, y \pm 1)$  :

$$T_y^\pm := \sum_{k \geq 0} \mathbf{1}_{\{\widetilde{X}_{\tau_k} = y, \widetilde{X}_{\tau_{k+1}} = y \pm 1\}} \frac{\xi_{\widetilde{N}_{\tau_k}(y, y \pm 1)}^\pm(y)}{w(\widetilde{Z}_{\tau_k}(y \pm 1))}. \quad (2.7)$$

From the time-line construction, it is clear that

$$\begin{aligned} & \{\widetilde{Z}_\infty(y - 1) = \infty\} \cap \{\widetilde{Z}_\infty(y + 1) = \infty\} \cap \{T_y^+ \wedge T_y^- < \infty\} \\ & \subset \{T_y^+ = T_y^- < \infty\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

since otherwise, after a certain time, the walk would jump infinitely many times on one side of  $y$  before performing one more jump on the other side.

Section 3.1 is dedicated to proving the next proposition, using monotonicity properties of the time-line construction.

**Proposition 2.6.** *If  $\widetilde{X}$  is a continuous-time process defined as in Proposition 2.5, then, for any  $y \in \mathbb{Z}$ ,*

$$\mathbb{P}(T_y^+ = T_y^- < \infty, \widetilde{Z}_\infty(y - 1) = \widetilde{Z}_\infty(y + 1) = \infty) = 0.$$

The following Proposition is proved in Section 3.2, using martingale arguments.

**Proposition 2.7.** *If  $\widetilde{X}$  is a continuous-time process defined as in Proposition 2.5, then, for any  $y \in \mathbb{Z}$ ,*

$$\left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} e^{2\beta[\widetilde{l}_{\tau_k}(y) - \alpha\widetilde{l}_{\tau_k}(y-1)]} < \infty \right\} \subset \{T_y^- < \infty\}.$$

Now, fix  $x \in \mathbb{Z}$  and fix  $K \geq L + 2$ , then  $\{\widetilde{R}' = \{x, \dots, x + K + 1\}\} \subset \{|\widetilde{R}'| \geq L + 4\}$ .

Using the series convergence of Lemma 2.4 and Proposition 2.7, we deduce

$$\{\widetilde{R}' = \{x, \dots, x + K + 1\}\} \subset \{T_{x+L+2}^- < +\infty\}.$$

Hence, using the inclusion (2.8),

$$\{\widetilde{R}' = \{x, \dots, x + K + 1\}\} \subset \{T_{x+L+2}^- = T_{x+L+2}^+ < +\infty\}.$$

Therefore, using Proposition 2.6, it implies that

$$\mathbb{P}(\widetilde{R}' = \{x, \dots, x + K + 1\}) = 0.$$

Taking finally the union over  $x \in \mathbb{Z}$  and  $K \geq L + 2$ , and using Proposition 2.5, we conclude that

$$\mathbb{P}(|R'| \geq L + 4) = \mathbb{P}(|\widetilde{R}'| \geq L + 4) = 0.$$

### 3 Monotonicity of the time-line construction and martingale arguments

In Section 3.1, we prove Proposition 2.6 by taking advantage of some monotonicity properties occurring in the time-line construction. The whole proof is due to Tarrès, [84], but we use, at the end of this proof, a more convenient argument, due to Basdevant, Schapira and Singh, [4]. In Section 3.2, we use classical martingale arguments to prove Proposition 2.7.

In these two sections, we generalize some previous results to a class of dynamics involving non-monotonic weight function. More precisely, all the results hold for any positive functions  $f^\pm(\cdot, \cdot)$ , and any positive non-decreasing function  $w(\cdot)$ . Note that  $w/f^\pm$  can be non-monotonic.

### 3.1 Proof of Proposition 2.6

Recall the time-line construction introduced in the previous Section, in which we have defined the function  $\mathcal{M}$  which maps a collection  $\xi$  of positive real numbers to a continuous-time walk  $\mathcal{M}(\xi)$ .

**Définition 3.1.** *Given  $\xi^1 = ((\xi^1)_k^\pm(y))_{y \in \mathbb{Z}, k \geq 0}$  and  $\xi^2 = ((\xi^2)_k^\pm(y))_{y \in \mathbb{Z}, k \geq 0}$  two collections of random variables on  $\mathbb{R}_+$ , we say that  $\xi^1 \gg \xi^2$  if, for all  $k \geq 0$  and  $y \in \mathbb{Z}$ , we have that  $(\xi^1)_k^+(y) \leq (\xi^2)_k^+(y)$  and  $(\xi^1)_k^-(y) \geq (\xi^2)_k^-(y)$  almost surely.*

Before citing the next Lemma due to Tarrès, let us define two continuous-time walks  $\widetilde{X}^1 := \mathcal{M}(\xi^1)$  and  $\widetilde{X}^2 := \mathcal{M}(\xi^2)$ , adopting the natural notations  $\widetilde{Z}_t^1(y)$  and  $\widetilde{Z}_t^2(y)$ , for any  $y \in \mathbb{Z}$ . For any  $i \in \mathbb{N}$  and any  $y \in \mathbb{Z}$ , let  $n_{\{y, y+1\}}^1(i)$  (resp.  $n_{\{y, y+1\}}^2(i)$ ) be the time of the  $i$ -th crossing of  $\widetilde{X}^1$  (resp.  $\widetilde{X}^2$ ) of the non-oriented edge  $\{y, y+1\}$ , with the convention that  $n_{\{y, y+1\}}^1(0) = n_{\{y, y+1\}}^2(0) = 0$ .

**Lemme 3.2** (Tarrès, [84]). *Assume that  $\xi^1 \gg \xi^2$  and that the constructions of  $\widetilde{X}^1$  and  $\widetilde{X}^2$  do not fail, then, for any  $i \in \mathbb{N}$  and  $y \in \mathbb{Z}$ , we almost surely have that*

$$\widetilde{Z}_{n_{\{y, y+1\}}^1(i)}^1(y+1) \geq \widetilde{Z}_{n_{\{y, y+1\}}^2(i)}^2(y+1) \text{ and } \widetilde{Z}_{n_{\{y, y+1\}}^1(i)}^1(y) \leq \widetilde{Z}_{n_{\{y, y+1\}}^2(i)}^2(y).$$

Here follows the main proof of this Section.

*Proof of Proposition 2.6.* In order to apply the last Lemma, fix  $y \in \mathbb{Z}$  and define the collection :

$$\mathcal{H}_y := \left( (\xi_k^\pm(x), k \geq 0, x \neq y), (\xi_k^-(y), k \geq 0), (\xi_k^+(y), k \geq 1) \right),$$

where the  $\xi$ 's are independent and defined as in Proposition 2.5, i.e.  $\xi_k^\pm(x)$  is an exponential random variable with mean  $f^\pm(x, k)$ .

Then, note that the process  $\widetilde{X}$  defined in Proposition 2.5 has the same law as  $\mathcal{M}(\mathcal{H}_y, \xi_0^+(y))$ , where  $\xi_0^+(y)$  is an exponential random variable with mean 1, independent from  $\mathcal{H}_y$ . This means that  $X$  has the same law as the embedded walk of  $\mathcal{M}(\mathcal{H}_y, \xi_0^+(y))$ .

Moreover, we can create a family of walks  $\widetilde{X}^{(u)} := \mathcal{M}(\mathcal{H}_y, u)$ ,  $u > 0$ , which correspond to continuous-time walks defined according to the time-line construction, with  $\xi_0^+(y) = u$ . For all  $u > 0$ , in a way similar to (2.7), define :

$$T_y^\pm(\mathcal{H}_y, u) = \sum_{k \geq 0} \mathbf{1}_{\{\widetilde{X}_{\tau_k}^{(u)} = y, \widetilde{X}_{\tau_k+1}^{(u)} = y \pm 1\}} \frac{\xi_{\widetilde{N}_{\tau_k}^{(u)}(y, y \pm 1)}^\pm(y)}{w(\widetilde{Z}_{\tau_k}^{(u)}(y \pm 1))} \quad (3.1)$$

$$= \sum_{k=0}^{\widetilde{N}_\infty^{(u)}(y, y \pm 1)} \frac{\xi_k^\pm(y)}{w\left(\widetilde{Z}_{n_{\{y, y \pm 1\}}^{(u)}(2k + \mathbf{1}_{\{\pm y < 0\}})}^\pm(y \pm 1)\right)}, \quad (3.2)$$

which is the total time consumed by the clocks attached to the oriented edge  $(y, y \pm 1)$  for the walk  $X^{(u)}$ .

Then, Lemma 3.2 implies that, for any  $u, u' > 0$  such that  $u > u'$ , almost surely on the event  $\{T_y^\pm(\mathcal{H}_y, u), T_y^\pm(\mathcal{H}_y, u') < \infty\} \cap \{\tilde{Z}_\infty^{(u)}(y \pm 1) = \tilde{Z}_\infty^{(u')}(y \pm 1) = \infty\}$ , we have that

$$T_y^+(\mathcal{H}_y, u) > T_y^+(\mathcal{H}_y, u') \text{ and } T_y^-(\mathcal{H}_y, u) \leq T_y^-(\mathcal{H}_y, u').$$

Thus, it implies that, given  $\mathcal{H}_y$ , there exists at most one value  $u_0 = u_0(\mathcal{H}_y)$  of  $\xi_0^+(y)$  such that the event  $\{T_y^+ = T_y^- < \infty\} \cap \{\tilde{Z}_\infty(y+1) = \tilde{Z}_\infty(y-1) = \infty\}$  occurs. If such a value does not exist, then we use the convention  $u_0 = \infty$ .

Note that  $\{\tilde{Z}_\infty(y+1) = \tilde{Z}_\infty(y-1) = \infty\}$  implies that the construction succeed, which is already proved to happen a.s.

Then we conclude with

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_y^+ = T_y^- < \infty, \tilde{Z}_\infty(y+1) = \tilde{Z}_\infty(y-1) = \infty) \\ \leq \mathbb{E}(\mathbb{P}(\xi_0^+(y) = u_0 | \mathcal{H}_y)) = 0. \end{aligned}$$

□

### 3.2 Proof of Proposition 2.7

Fix  $y \in \mathbb{Z}$  and assume for simplicity that  $y > 0$  (but similar arguments hold whenever  $y \leq 0$ ). Let  $\theta_k$  be the time of the  $k$ -th jump from  $y-1$  to  $y$ , and let  $i_k$  be the local time at site  $y-1$ , at time  $\theta_k$ . Define a new filtration  $\mathcal{G}$  such that, for all  $n \geq 0$ , we have

$$\mathcal{G}_n = \sigma\left((\xi_k^\pm(x), k \geq 0, x \neq y), (\xi_k^+(y), k \geq 0), (\xi_k^-(y), 0 \leq k \leq n)\right),$$

and recall that the  $\xi$ 's are exponential clocks defined as in Proposition 2.5. For any  $n \geq 0$ , define

$$\begin{aligned} Y_y^-(n) &:= \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{\{\theta_{k+1} < \infty\}} \frac{f^-(y, k)}{w(i_{k+1})}, \\ T_y^-(n) &:= \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{\{\theta_{k+1} < \infty\}} \frac{\xi_k^-(y)}{w(i_{k+1})}, \\ M_n &:= T_y^-(n) - Y_y^-(n), \\ \langle M \rangle_n &:= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}\left((M_{k+1} - M_k)^2 | \mathcal{G}_k\right). \end{aligned}$$

Notice that, given  $\mathcal{G}_n$ , we know the duration of the  $n+1$  first clocks attached to the oriented edge  $(y, y-1)$ , and the duration of any other clock attached to any other edge.

## CHAPITRE 2. STUCK WALKS

---

Then, as  $y > 0$ ,  $\theta_{n+2}$  and thus  $i_{n+2}$  are  $\mathcal{G}_n$ -measurable, whereas  $\xi_{n+1}^-(y)$  is independent of  $\mathcal{G}_n$ . We have :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n+1} - M_n | \mathcal{G}_n) &= \frac{\mathbb{1}_{\{\theta_{n+2} < \infty\}}}{w(i_{n+2})} \mathbb{E}(\xi_{n+1}^-(y) - f^-(y, n+1)) = 0, \\ \mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)^2 | \mathcal{G}_n) &= \frac{\mathbb{1}_{\{\theta_{n+2} < \infty\}}}{(w(i_{n+2}))^2} \mathbb{E}((\xi_{n+1}^-(y) - f^-(y, n+1))^2) \\ &= \frac{\mathbb{1}_{\{\theta_{n+2} < \infty\}} (f^-(y, n+1))^2}{(w(i_{n+2}))^2}.\end{aligned}$$

Hence,  $M_n$  is a square integrable  $\mathcal{G}$ -martingale. By a result of Doob, we know that  $M_n$  converges a.s. to a finite limit on the event  $\{\langle M \rangle_\infty < \infty\}$ , see [53], Proposition VII-2.3. Thus, on the event  $\{\langle M \rangle_\infty < \infty\} \cap \{Y_y^-(\infty) < \infty\}$ , we have a.s.  $T_y^- = \lim_n T_y^-(n) < \infty$ . Besides, (2.5) implies :

$$\begin{aligned}Y_y^-(\infty) &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} e^{2\beta[\tilde{l}_{\tau_k}(y) - \alpha \tilde{l}_{\tau_k}(y-1)]}, \\ \langle M \rangle_\infty &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} e^{4\beta[\tilde{l}_{\tau_k}(y) - \alpha \tilde{l}_{\tau_k}(y-1)]},\end{aligned}$$

so that  $\{Y_y^-(\infty) < \infty\} \subset \{\langle M \rangle_\infty < \infty\}$ . Thus, the following inclusion a.s. holds :

$$\left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} e^{2\beta[\tilde{l}_{\tau_k}(y) - \alpha \tilde{l}_{\tau_k}(y-1)]} < \infty \right\} \subset \{T_y^- < \infty\}.$$

□

**Remarque 3.3.** *Note that, in fact, we do not need the explicit form of  $f^\pm$  and  $w$ . More generally, for any positive function  $f^\pm$  and  $w$ , the inclusions  $\{Y_y^-(\infty) < \infty\} \subset \{\langle M \rangle_\infty < \infty\}$  and consequently  $\{Y_y^-(\infty) < \infty\} \subset \{T_y^- < \infty\}$  hold.*

## 4 Trigonometric results

### 4.1 Definition of the linear system

Fix  $L \geq 1$  and assume that  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$ , where  $(\alpha_L)_{L \geq 1}$  is defined in (1.3). We will describe some properties of the set of possible solutions  $(l_0, \dots, l_{K+2})$  to linear equations that are part of a bi-infinite Fibonacci-type sequence. First, we introduce this linear system, then we distinguish between three cases, depending on the size of the system.



For all  $K \in \mathbb{N}$  and for all  $j \in \{1, \dots, K\}$ , let

$$\begin{aligned} d_0 &= l_0 - l_1 + \alpha l_2, \\ d_j &= -\alpha l_{j-1} + l_j - l_{j+1} + \alpha l_{j+2}, \\ d_{K+1} &= -\alpha l_K + l_{K+1} - l_{K+2}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

For all  $K \in \mathbb{N}$ , define the linear system :

$$d_1 = d_2 = \dots = d_K = 0, l_0 = 0 \text{ and } \sum_{j=1}^{K+1} l_j = 1. \tag{E_K}$$

Recall that, given  $\alpha > 1/3$ ,  $\omega \in (0, \pi)$  is the unique real number such that :

$$\cos(\omega) = \frac{1 - \alpha}{2\alpha}.$$

Then, using (1.3),

$$\frac{2\pi}{L+3} < \omega < \frac{2\pi}{L+2}.$$

In Section 4.2, we describe the unique solution of the linear system  $(E_K)$  with the extra condition  $l_{K+2} = 0$ , when  $K$  is *small*, namely  $K \in \{0, \dots, L+1\}$ .

In Section 4.3, we prove some properties of an associated affine system when  $K = L$ . In other words, we consider the same system, but with general  $d_j$ 's (i.e. not necessarily equal to 0), and we emphasize some identities.

In Section 4.4, we describe some properties of the solutions of the linear system  $(E_K)$ , with the conditions  $l_1, \dots, l_{K+2} \geq 0$ , when  $K$  is *large*, i.e.  $K \geq L$ . We also prove Lemma 2.3.

We refer the reader to [42], for instance, for known properties of these solutions.

## 4.2 Small-size system : $K \in \{0, \dots, L+1\}$

The following Proposition gives an explicit form for the solution of  $(E_K)$ , with  $l_{K+2} = 0$ , when  $K$  is *small*, i.e.  $K \in \{0, \dots, L+1\}$ . As we prove in Section 6, these solutions correspond to the asymptotic normalized local times of the walk, on the corresponding events.

**Proposition 4.1.** *If  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$  and  $K \in \{0, \dots, L+1\}$ , then the solution of  $(E_K)$ , with the extra condition  $l_{K+2} = 0$ , is unique and satisfies :*

$$l_j = \frac{\sin\left(\frac{K+2-j}{2}\omega\right) \sin\left(\frac{j\omega}{2}\right)}{Z} \text{ for all } j \in \{0, \dots, K+2\}, \tag{4.2}$$

## CHAPITRE 2. STUCK WALKS

---

where  $Z$  is a normalisation constant. Moreover,

$$d_0 = -d_{K+1} = -\alpha \frac{\sin((\frac{K+3}{2})\omega) \sin(\frac{\omega}{2})}{Z}. \quad (4.3)$$

The quantities  $l_1, \dots, l_{K+1}$  are positive and if  $K \in \{0, \dots, L-1\}$  (resp.  $K \in \{L, L+1\}$ ) then  $d_0 < 0$  (resp.  $d_0 > 0$ ).

Moreover, (4.2) and (4.3) hold when  $\alpha = \alpha_L$  and  $K \in \{1, \dots, L-1\}$ .

**Remarque 4.2.** We will later deal with two different systems  $(E_K)$  and  $(E_{K'})$  together, with  $K \neq K'$ . We will then use the notations  $d_0(K)$ ,  $d_{K+1}(K)$  and  $d_0(K')$ ,  $d_{K'+1}(K')$  in order to avoid any confusion.

*Démonstration.* All the arguments in the beginning of this proof, until (4.6), hold for any  $K \in \mathbb{N}$  and will be used later.

Let us first emphasize the fact that the set of solutions of the system  $d_1 = \dots = d_K = 0$  is 3-dimensional. Indeed, let  $(l_0, \dots, l_{K+2})$  be a real-valued vector satisfying  $d_1 = \dots = d_K = 0$ . If we fix  $l_0$ ,  $l_1$  and  $l_2$ , then it is easy to see that, by induction, we can find a unique solution. It implies that the set of solutions is 3-dimensional.

Moreover, these solutions satisfy linear recurrence relations with characteristic polynomial  $P(X) = \alpha X^3 - X^2 + X - \alpha = \alpha(X-1)(X-e^{i\omega})(X-e^{-i\omega})$ , hence the general solutions to  $(E_K)$  are such that :

$$l_j = A + Be^{ij\omega} + Ce^{-ij\omega}, \text{ for all } j \in \{0, \dots, K+2\}, \quad (4.4)$$

for some constants  $A, B, C \in \mathbb{C}$ . Recall that  $\omega$  is such that  $\cos(\omega) = (1-\alpha)/2\alpha$ .

Then, using the conditions  $l_0 = 0$ ,  $l_{K+2} = 0$  and  $\sum l_j = 1$ , we can compute  $A$ ,  $B$  and  $C$ , which will imply the uniqueness of the solution  $(l_0, \dots, l_{K+2})$  of  $(E_K)$  with  $l_{K+2} = 0$ .

First, the condition  $l_0 = A + B + C = 0$  implies

$$l_j = A(1 - e^{ij\omega}) - C(e^{ij\omega} - e^{-ij\omega}). \quad (4.5)$$

Now, let us write  $l_j$  as a function of  $A$  and  $l_{j_0}$ , for some  $j_0 \in \{1, \dots, (L+3) \wedge (K+2)\}$ . As  $2\pi/(L+3) < \omega < 2\pi/(L+2)$ , we have  $e^{ij_0\omega} - e^{-ij_0\omega} \neq 0$ , for any  $j_0 \in \{1, \dots, (L+3) \wedge (K+2)\}$ . Now fix  $j_0 \in \{1, \dots, (L+3) \wedge (K+2)\}$ , then (4.5) applied to  $j = j_0$  implies that :

$$C = \frac{A(1 - e^{ij_0\omega}) - l_{j_0}}{e^{ij_0\omega} - e^{-ij_0\omega}},$$

and, for all  $j \in \{1, \dots, K+2\}$ , we have :

$$l_j = A(1 - e^{ij\omega}) + \left(A(e^{ij_0\omega} - 1) + l_{j_0}\right) \frac{e^{ij\omega} - e^{-ij\omega}}{e^{ij_0\omega} - e^{-ij_0\omega}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin(j\omega)}{\sin(j_0\omega)} l_{j_0} + A \frac{\sin(j_0\omega) - \sin((j_0 - j)\omega) - \sin(j\omega)}{\sin(j_0\omega)} \\
&= \frac{\sin(j\omega)}{\sin(j_0\omega)} l_{j_0} + A \frac{\cos(\frac{j_0}{2}\omega) - \cos((\frac{j_0}{2} - j)\omega)}{\cos(\frac{j_0}{2}\omega)} \\
&= \frac{\sin(j\omega)}{\sin(j_0\omega)} l_{j_0} - 2A \frac{\sin(\frac{j_0-j}{2}\omega) \sin(\frac{j\omega}{2})}{\cos(\frac{j_0}{2}\omega)}. \tag{4.6}
\end{aligned}$$

The previous arguments hold for any  $K \in \mathbb{N}$ , but we now focus on the case  $K \in \{0, \dots, L+1\}$ . We can apply (4.6) to  $j_0 = K+2$ , and use the conditions  $l_{K+2} = 0$  and  $\sum l_j = 1$ . This yields :

$$\begin{aligned}
l_j &= \frac{\sin\left(\frac{K+2-j}{2}\omega\right) \sin\left(\frac{j\omega}{2}\right)}{\sum_{i=1}^{K+1} \sin\left(\frac{K+2-i}{2}\omega\right) \sin\left(\frac{i\omega}{2}\right)} \\
&= \frac{\cos\left(\left(\frac{K+2}{2} - j\right)\omega\right) - \cos\left(\frac{K+2}{2}\omega\right)}{\sum_{i=1}^{K+1} \left[\cos\left(\left(\frac{K+2}{2} - i\right)\omega\right) - \cos\left(\frac{K+2}{2}\omega\right)\right]}. \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Notice that, if  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$  and  $K \in \{0, \dots, L+1\}$ , then for all  $j \in \{1, \dots, K+1\}$  :

$$\sin\left(\frac{K+2-j}{2}\omega\right) > 0 \text{ and } \sin\left(\frac{j\omega}{2}\right) > 0.$$

We have now proved (4.2).

Let us compute  $d_0 = l_0 - l_1 + \alpha l_2$ . As the solution is symmetric, i.e.  $l_j = l_{K+2-j}$ , we have that  $d_{K+1} = -d_0$ .

There is an easy way to compute  $d_0$ . Indeed, let us extend the definition (4.2) of  $l_j$  to  $j = -1$ , then, using the fact that the system is a part of a bi-infinite Fibonacci-type sequence (for which  $d_j = 0$  for all  $j \in \mathbb{Z}$ ), one can show that  $-\alpha l_{-1} + l_0 - l_1 + \alpha l_2 = 0$ . Then, it implies

$$d_0 = \alpha l_{-1} = -\alpha \frac{\sin\left(\frac{K+2+1}{2}\omega\right) \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sum_{i=1}^{K+1} \sin\left(\frac{K+2-i}{2}\omega\right) \sin\left(\frac{i\omega}{2}\right)},$$

which finishes the proof.  $\square$

**Remarque 4.3.** The critical case  $\alpha = \alpha_L$  is more difficult to describe. When  $K = L$ , then the conditions  $l_0 = 0$  and  $l_{L+2} = 0$  are equivalent, hence the solution is not unique anymore, and the set of solutions is in fact 1-dimensional. More generally, the solution is not unique as soon as  $(K+2)\omega$  is a multiple of  $2\pi$ .

**Remarque 4.4.** If  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$  is such that  $\omega/\pi$  is irrational, then the solution of the system, with extra condition  $l_{K+2} = 0$ , is unique for any  $K$ . Moreover, we can find

## CHAPITRE 2. STUCK WALKS

---

infinitely many  $K$ 's such that  $l_1, \dots, l_{K+1}, d_0$  are positive and  $d_{K+1}$  is negative. Indeed, this occurs when the distance between  $(K+2)\omega/2$  and  $(2\mathbb{Z}+1)\pi$  is smaller than the distance between  $j\omega/2$  and  $(2\mathbb{Z}+1)\pi$ , for all  $j \in \{1, \dots, K, K+4\}$ . One can convince itself of that fact by using (4.7) and drawing a picture of the unit circle. We refer the reader to [38] for more details.

Nevertheless, when  $K \geq L$ , there can be more than one solution, some  $l_j$ 's can be nonpositive and  $d_0, d_{K+1}$  can take arbitrary signs.

### 4.3 Associated affine medium-size system : $K = L$

The main purpose of this section is to prove the following Proposition and its corollary, which will be used to prove Proposition 2.1.

Let us first define the affine version of the system  $(E_L)$ .

Fix  $L \geq 1$  and assume that  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$ , where  $(\alpha_L)_{L \geq 1}$  is defined in (1.3). Fix also  $L$  real numbers  $d_j$ , for  $j \in \{1, \dots, L\}$ . Then, consider the following system on  $(l_0, \dots, l_{L+2})$  :

$$AS(d_1, \dots, d_L) \begin{cases} l_0 = l_{L+2} = 0 \\ d_j = -\alpha l_{j-1} + l_j - l_{j+1} + \alpha l_{j+2}, \text{ for all } j \in \{1, \dots, L\} \\ \sum_{j=1}^{L+1} l_j = 1. \end{cases}$$

Define also the quantities :

$$\begin{aligned} d_0 &:= -l_1 + \alpha l_2, \\ d_{L+1} &:= -\alpha l_L + l_{L+1}. \end{aligned}$$

**Proposition 4.5.** *Assume that  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$ . There exists a unique solution  $(l_0, \dots, l_{L+2})$  of  $AS(d_1, \dots, d_L)$ , and there exist positive constants  $c_1, \dots, c_L$ , that do not depend on  $d_1, \dots, d_L$ , such that :*

$$\begin{aligned} d_{L+1} &= -d_0(L) - \sum_{k=1}^L c_k d_k, \\ d_0 &= d_0(L) - \sum_{k=1}^L c_{L+1-k} d_k, \end{aligned}$$

where  $d_0(L)$  is a positive constant defined in Remark 4.2.

**Corollaire 4.6.** *Assume that  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$ , and that  $(l_0, \dots, l_{L+2})$  is a solution of the system :*

$$\begin{aligned} l_0 &= 0, \quad l_{L+2} \geq 0 \\ d_j &= -\alpha l_{j-1} + l_j - l_{j+1} + \alpha l_{j+2}, \text{ for all } j \in \{1, \dots, L\} \\ \sum_{j=1}^{L+1} l_j &= 1. \end{aligned}$$

Then the following inequality holds :

$$d_0 \geq d_0(L) - \sum_{k=1}^L c_{L+1-k} d_k.$$

*Proof of Corollary 4.6.* Define  $\tilde{l}_j = l_j$  for  $j \in \{0, \dots, L+1\}$ , and  $\tilde{l}_{L+2} = 0$ . Then,  $\tilde{d}_0 = d_0$ , and notice that  $(\tilde{l}_0, \dots, \tilde{l}_{L+2})$  is a solution of  $AS(d_1, \dots, d_{L-1}, d_L - \alpha l_{L+2})$ , hence

$$d_0 = d_0(L) - \sum_{k=1}^L c_{L+1-k} d_k + \alpha c_1 l_{L+2},$$

which enables us to conclude, using that  $l_{L+2} \geq 0$ .  $\square$

*Proof of Proposition 4.5.* First, notice that the matrix associated to the system  $AS(d_1, \dots, d_L)$  can be written as :

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ -\alpha & 1 & -1 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix},$$

where the size of  $M$  is  $(L+3)^2$ , and  $AS(d_1, \dots, d_L)$  is then re-written as :

$$M \begin{pmatrix} l_0 \\ \vdots \\ l_{L+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_L \end{pmatrix}.$$

By Proposition 4.1, there exists a unique solution to  $(E_L)$  with  $l_{L+2} = 0$ , which is equivalent to  $AS(0, \dots, 0)$ . Therefore  $M$  has a nonzero determinant, thus it is invertible. Now, we first want to prove that, for some constants  $c_1, \dots, c_L$ ,

$$d_{L+1} = -d_0(L) - \sum_{k=1}^L c_k d_k, \tag{4.8}$$

which, by symmetry, will imply :

$$d_0 = d_0(L) - \sum_{k=1}^L c_{L+1-k} d_k,$$

## CHAPITRE 2. STUCK WALKS

---

and we will then prove that these constants are positive. Notice that

$$\begin{aligned} d_{L+1} &= -\alpha l_L + l_{L+1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_L \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix} M^{-1} \left( v_3 + \sum_{k=1}^L d_k v_{3+k} \right), \end{aligned}$$

where  $(v_k)_k$  is the canonical basis of  $\mathbb{R}^{L+3}$ . Then, using Proposition 4.1 and the notations of Remark 4.2, the vector  $M^{-1}v_3$  is the solution to  $(E_L)$  with  $l_{L+2} = 0$ , which yields

$$d_0(L) = - \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix} M^{-1}v_3,$$

and we prove (4.8) by defining, for all  $k \in \{1, \dots, L\}$ ,

$$c_k = - \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix} M^{-1}v_{3+k}.$$

It remains to prove that, for all  $k \in \{1, \dots, L\}$ ,  $c_k > 0$ . Recall that these constants do not depend on  $d_1, \dots, d_L$ . We proceed by induction on  $k = 1, \dots, L$ .

First, for  $k = 1$ , choose  $d_2 = \dots = d_L = 0$ , and instead of fixing  $d_1$  let us fix  $l_1 = 0$ . Then, the shifted vector  $(\tilde{l}_0, \dots, \tilde{l}_{(L-1)+2}) := (l_1, \dots, l_{L+2})$  is the unique solution of  $(E_{L-1})$  with  $\tilde{l}_{(L-1)+2} = 0$ . Therefore, using Proposition 4.1 and the notations of Remark 4.2, the solution is unique,  $d_1 = d_0(L-1) < 0$  and  $d_{L+1} = -d_0(L-1) > 0$ . On the other hand, (4.8) implies that  $c_1 = (-d_0(L) - d_{L+1})/d_1 > 0$ , which finishes the case  $k = 1$ .

Now, assume that, for some  $k \in \{2, \dots, L\}$ ,  $c_1, \dots, c_{k-1} > 0$ , and let us prove that  $c_k > 0$ . As previously, fix  $d_{k+1} = \dots = d_L = 0$  (except if  $k = L$ ), and fix  $l_1 = \dots = l_k = 0$ . Then the shifted vector  $(\tilde{l}_0, \dots, \tilde{l}_{(L-k)+2}) := (l_k, \dots, l_{L+2})$  is the unique solution of  $(E_{L-k})$  with  $\tilde{l}_{(L-k)+2} = 0$ . Thus,  $d_1 = \dots = d_{k-2} = 0$  (if  $k \geq 3$ ),  $d_{k-1} = \alpha l_{k+1} > 0$ ,  $d_k = d_0(L-k) < 0$  and  $d_{L+1} = -d_0(L-k) > 0$ . On the other hand, (4.8) implies that  $c_k = (-d_0(L) - d_{L+1} - c_{k-1}d_{k-1})/d_k > 0$ , which finishes the proof.  $\square$

### 4.4 Non-negative solutions of the large-size system, i.e. $K \geq L$ , and proof of Lemma 2.3

Recall the definition of the system  $(E_K)$  introduced in Section 4.1. When  $K \geq L$ , as it is noticed in Remarks 4.3 and 4.4, the set of solutions can be 1-dimensional, and *a priori* we cannot determine the signs of  $d_0$  nor  $d_{K+1}$ .

But, the following result, which implies Lemma 2.3, is helpful in order to understand the behavior of the solutions, even without uniqueness.

**Proposition 4.7.** (i) Assume that  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$  and  $K \geq L$ . Then, if some real-valued vector  $(l_0, \dots, l_{K+2})$  satisfies  $(E_K)$  and if  $l_1, \dots, l_{K+2} \geq 0$ , then  $d_0 \geq c(K) > 0$ , where  $c(K)$  is a positive constant depending only on  $\alpha$  and  $K$ . It implies that if  $l_{K+2} = 0$ , then, by symmetry, we have  $d_{K+1} \leq -c(K)$ .

(ii) Assume that  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L]$ . If  $K \geq L$  and if  $(l_0, \dots, l_{K+2})$  satisfies  $(E_K)$ , then :

$$l_{L+2} - \alpha l_{L+1} = -\frac{\sin(\frac{L+2}{2}\omega)}{\sin(\frac{L}{2}\omega)} l_1 + 2\alpha \frac{\cos(\frac{\omega}{2}) \sin(\frac{L+3}{2}\omega)}{\sin(\frac{L}{2}\omega)} l_{L+1}. \quad (4.9)$$

Moreover, if  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$  and if  $l_1, \dots, l_{K+2} \geq 0$ , then  $l_{L+2} - \alpha l_{L+1} < -c(K)$ , where we can choose  $c(K)$  such that it is the same positive constant as in (i) by convenience.

*Démonstration.* Let us prove the first point :

(i) Recall that  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$ . Let us first prove that  $\sum_{k=1}^{L+1} l_k > c$ , for some positive constant  $c$ .

Recall that  $l_0 = 0$  and  $d_1 = \dots = d_K = 0$ . If  $l_1 < c$  and  $l_2 < c$ , we can prove, by induction, that

$$l_j \leq 6^{j-1}c \text{ for all } j \in \{1, \dots, K+2\}, \quad (4.10)$$

which implies, as soon as  $c$  is small enough, that  $\sum_{j=1}^{K+1} l_j < 1$  which contradicts the weight condition. In order to prove (4.10) by induction, recall that  $\alpha > 1/3$  and notice that, for all  $j \in \{2, \dots, K+1\}$ ,  $d_{j-1} = -\alpha l_{j-2} + l_{j-1} - l_j + \alpha l_{j+1} = 0$  and  $l_{j-1} \geq 0$ , which implies that

$$l_{j+1} \leq l_{j-2} + l_j/\alpha.$$

Now, define, for all  $j \in \{0, \dots, L+2\}$ ,

$$\tilde{l}_j := \frac{l_j}{\sum_{k=1}^{L+1} l_k}.$$

Now, we use Corollary 4.6 with  $(\tilde{l}_0, \dots, \tilde{l}_{L+2})$ , which enables us to conclude :

$$d_0 \geq d_0(L) \times \sum_{k=1}^{L+1} l_k > d_0(L) \times c > 0.$$

(ii) Here, we assume  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L]$ . To prove (ii), we consider the system  $(E_K)$ , together with the conditions  $l_1, \dots, l_{K+2} \geq 0$  and let  $l_{L+1}$  be a parameter in order to explicit the  $l_j$ 's in terms of  $l_{L+1}$ .

We can use the arguments at the beginning of the proof of Proposition 4.1. In particular,

## CHAPITRE 2. STUCK WALKS

---

noticing that  $\sin((L+1)\omega) \neq 0$ , we can apply (4.6) to  $j_0 = L+1$ , which yields, for all  $j \in \{1, \dots, K+2\}$ , and for some constant  $A$ ,

$$l_j = \frac{\sin(j\omega)}{\sin((L+1)\omega)} l_{L+1} - 2A \frac{\sin(\frac{L+1-j}{2}\omega) \sin(\frac{j\omega}{2})}{\cos(\frac{L+1}{2}\omega)}. \quad (4.11)$$

Then, we can explicit  $A$  in terms of  $l_{L+1}$  and  $l_1$  :

$$2A \frac{\sin(\frac{L}{2}\omega) \sin(\frac{\omega}{2})}{\cos(\frac{L+1}{2}\omega)} = \frac{\sin(\omega)}{\sin((L+1)\omega)} l_{L+1} - l_1, \quad (4.12)$$

and compute

$$\begin{aligned} l_{L+2} - \alpha l_{L+1} &= \left( \frac{\sin((L+2)\omega)}{\sin((L+1)\omega)} - \alpha \right) l_{L+1} + 2A \frac{\sin(\frac{L+2}{2}\omega) \sin(\frac{\omega}{2})}{\cos(\frac{L+1}{2}\omega)} \\ &= \left( \frac{\sin((L+2)\omega)}{\sin((L+1)\omega)} - \alpha + \frac{\sin(\omega) \sin(\frac{L+2}{2}\omega)}{\sin((L+1)\omega) \sin(\frac{L\omega}{2})} \right) l_{L+1} \\ &\quad - \frac{\sin(\frac{L+2}{2}\omega)}{\sin(\frac{L\omega}{2})} l_1. \end{aligned}$$

Now, in order to prove (4.9), define  $E$  such that :

$$\frac{\sin((L+2)\omega)}{\sin((L+1)\omega)} - \alpha + \frac{\sin(\omega) \sin(\frac{L+2}{2}\omega)}{\sin((L+1)\omega) \sin(\frac{L\omega}{2})} = -\frac{\alpha E}{4 \sin(\frac{L\omega}{2}) \sin((L+1)\omega)},$$

then, using that  $\alpha^{-1} = 1 + 2 \cos(\omega)$  and the exponential forms of  $\sin$  and  $\cos$ , we have :

$$\begin{aligned} E &= \left( e^{i\frac{L}{2}\omega} - e^{-i\frac{L}{2}\omega} \right) \left( e^{i(L+2)\omega} - e^{-i(L+2)\omega} \right) \left( 1 + e^{i\omega} + e^{-i\omega} \right) \\ &\quad - \left( e^{i\frac{L}{2}\omega} - e^{-i\frac{L}{2}\omega} \right) \left( e^{i(L+1)\omega} - e^{-i(L+1)\omega} \right) \\ &\quad + \left( e^{i\frac{L+2}{2}\omega} - e^{-i\frac{L+2}{2}\omega} \right) \left( e^{i\omega} - e^{-i\omega} \right) \left( 1 + e^{i\omega} + e^{-i\omega} \right) \\ &= e^{\frac{3}{2}L\omega} \left( e^{i2\omega} + e^{i3\omega} \right) + e^{-\frac{3}{2}L\omega} \left( e^{-i2\omega} + e^{-i3\omega} \right) \\ &\quad - e^{\frac{L}{2}\omega} \left( 1 + e^{-i\omega} \right) - e^{-\frac{L}{2}\omega} \left( 1 + e^{i\omega} \right) \\ &= 4 \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \left( \cos\left(\left(\frac{3}{2}L + \frac{5}{2}\right)\omega\right) - \cos\left(\frac{L-1}{2}\omega\right) \right) \\ &= -8 \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \sin\left(\frac{L+3}{2}\omega\right) \sin\left((L+1)\omega\right), \end{aligned}$$

which proves (4.9).



Let us prove the second part of (ii). Assume that  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$ , and recall that it is equivalent to  $2\pi/(L+3) < \omega < 2\pi/(L+2)$ . Here, we use the notation  $\text{Cst}(\alpha, K)$  to denote a positive constant, depending on  $\alpha$  and  $K$ , which can be different from line to line or between two (in-)equalities.

Let us show that, there exists a constant  $\tilde{c}$  such that  $l_1 + l_{L+1} \geq \tilde{c}$ . It will imply the conclusion, using (4.9), i.e.  $l_{L+2} - \alpha l_{L+1} \leq -\text{Cst}(\alpha, K)(l_1 + l_{L+1}) \leq -\text{Cst}(\alpha, K)\tilde{c}$ .

By contradiction, assume that  $l_1 + l_{L+1} < \tilde{c}$ , then we obviously have  $l_1 < \tilde{c}$  and  $l_{L+1} < \tilde{c}$ . The formula (4.12) implies that

$$0 \leq 2A < \text{Cst}(\alpha, K) \times \tilde{c},$$

then (4.11) implies that

$$\sum_{j=1}^{K+1} l_j < (K+1)\text{Cst}(\alpha, K) \times \tilde{c}.$$

Now  $\tilde{c}$  small enough would imply  $\sum_{j=1}^{K+1} l_j < 1$ , and thus contradicts the weight condition.  $\square$

## 5 The walk has finite range : Proof of Proposition 2.1

In the section, we prove Proposition 2.1, which states that the walk has finite range. The general strategy of the proof is inspired by the one of [61]. This proof is quite simple, making use of Corollary 4.6.

*Démonstration.* Let us prove that there exists a constant  $p > 0$  such that, for all  $x \in \mathbb{Z}$  such that  $x < -L - 1$ , if the walker visits  $x + L + 1$ , then, with probability at least  $p$ , the walker does not visit the site  $x - 1$ , i.e.

$$\mathbb{P}(x - 1 \in R \mid x + L + 1 \in R) < 1 - p.$$

Note that  $p$  will not depend on  $x$ .

This will imply that

$$\mathbb{P}(\inf R = -\infty) = 0.$$

Then, the symmetric argument will hold and imply the conclusion.

For all  $y \in \mathbb{Z}$  and  $m \in \mathbb{N}$ , let  $u_m(y)$  be the first time  $k$  such that  $Z_k(y) = m$ . If  $Z_\infty(y) < m$ , then  $u_m(y) = +\infty$ .

Now fix  $x \in \mathbb{Z}$  such that  $x < -L - 1$ . For all  $m \in \mathbb{N}$ , we have

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = x + L + 1 \mid \mathcal{F}_k) \geq \frac{\mathbb{1}_{\{u_m(x+L)=k, Z_k(x+L-1)=0\}}}{1 + e^{2(2m-1)\beta}}.$$

## CHAPITRE 2. STUCK WALKS

---

This implies that, for all  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}\left(Z_{u_m(x+L)}(x+L-1) = 0 \mid \mathcal{F}_{u_1(x+L)}\right) \geq \mathbb{1}_{\{u_1(x+L) < \infty\}} \varepsilon_1,$$

where  $\varepsilon_1 := \varepsilon_1(m)$  is a constant depending on  $m$ , but not on  $x$ .

From now on, we work on the event  $\{Z_{u_m(x+L)}(x+L-1) = 0\}$ . Notice that, on this event, for any  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n(x) \geq u_1(x) > u_m(x+L)$ .

Define, for all  $k \in \mathbb{N}$ , the time spent in the interval  $[x, x+L+1]$ , i.e.

$$l_k^{(x)} := l_k(x) + l_k(x+1) + \dots + l_k(x+L+1), \quad (5.1)$$

and notice that  $l_{u_m(x+L)}^{(x)} = 2m - 1$ .

Fix  $\varepsilon_2 > 0$ , and define, for all  $n \in \mathbb{N}$ , the event  $U_n$  which is such that the walker performs an upstream jump on  $\{x+1, \dots, x+L\}$  of intensity at least  $\varepsilon_2$  between the times  $u_m(x+L)$  and  $u_n(x)$ , i.e. there exist  $k \in [u_m(x+L), u_n(x)]$  and  $j \in \{1, \dots, L\}$  such that  $\Delta_k(x+j)/l_k^{(x)} > \varepsilon_2$ ,  $X_k = x+j$  and  $X_{k+1} = x+j-1$ . If we define  $u_\infty(x) = \infty$ , then  $\bigcup_n U_n = U_\infty$ .

Now, notice that, on the event  $\{Z_{u_m(x+L)}(x+L-1) = 0\}$ , we have :

$$\begin{aligned} \{Z_\infty(x-1) > 0\} &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{u_1(x-1) = u_n(x) + 1\} \cap \{u_n(x) < \infty\} \\ &\subset \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \{u_1(x-1) = u_n(x) + 1\} \cap \{u_n(x) < \infty\} \cap U_n^c \right) \cup U_\infty. \end{aligned} \quad (5.2)$$

It is easy to upper-bound the probability of  $U_\infty$  by writing :

$$\mathbb{P}\left(U_\infty \mid \mathcal{F}_{u_m(x+L)}\right) \leq \sum_{k=l_{u_m(x+L)}^{(x)}}^{+\infty} e^{-2\beta\varepsilon_2 k}.$$

Then let us focus on the other union of events in (5.2). Until the conclusion of the proof, fix  $n \in \mathbb{N}$ , assume that  $u_n(x) < +\infty$  and  $l_{u_n(x)}(x) = 0$ , which is necessary to have  $u_1(x-1) = u_n(x) + 1$ . Moreover, assume that  $U_n^c$  holds and let us show that, at time  $u_n(x)$ , the stream at  $x$  is strongly positive, thus the probability for the walker to jump on  $x-1$  is small.

For  $j \in \{1, \dots, L\}$ , let  $k_j$  denote the last time before  $u_n(x)$  such that  $X_{k_j} = x+j$ . Then, as  $X_{k_j+1} = x+j-1$  and  $U_n^c$  holds, we have  $\Delta_{k_j}(x+j)/l_{k_j}^{(x)} \leq \varepsilon_2$ . Therefore, we have that, for any  $j \in \{1, \dots, L\}$ ,

$$\frac{\Delta_{u_n(x)}(x+j)}{l_{u_n(x)}^{(x)}} = \frac{-\alpha \left( l_{u_n(x)}(x+j-1) - l_{k_j}(x+j-1) \right) + \Delta_{k_j}(x+j) + 1}{l_{u_n(x)}^{(x)}}$$

$$\leq 2\varepsilon_2,$$

where the inequality holds as soon as we choose  $m > (1 + \varepsilon_2)/(2\varepsilon_2)$ .

Moreover, recall that  $l_{u_n(x)}(x) = 0$  and notice, using (5.1), that

$$\sum_{j=1}^{L+1} \frac{l_{u_n(x)}(x+j)}{l_{u_n(x)}^{(x)}} = 1.$$

Therefore, using Corollary 4.6, with  $l_j := l_{u_n(x)}(x+j)/l_{u_n(x)}^{(x)}$  for all  $j \in \{0, \dots, L+2\}$ , we obtain :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{u_n(x)}(x)}{l_{u_n(x)}^{(x)}} &\geq d_0(L) - \sum_{k=1}^L \frac{\Delta_{u_n(x)}(x+k)}{l_{u_n(x)}^{(x)}} c_{L+1-k} \\ &\geq d_0(L) - 2\varepsilon_2 \sum_{k=1}^L c_k > \frac{d_0(L)}{2} > 0, \end{aligned}$$

as soon as  $\varepsilon_2$  is small enough, depending only on the constants  $c_k$ 's and  $d_0(L)$ , where the  $c_k$ 's are positive constants defined in Proposition 4.5 and  $d_0(L)$  is defined in Remark 4.2.

Using (5.2) and using that  $l_{u_m(x+L)}^{(x)} = 2m - 1$ , we are finally able to conclude, as soon as  $m$  is large enough, as we have :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left( Z_\infty(x-1) > 0 \middle| \mathcal{F}_{u_m(x+L)} \right) \mathbb{1}_{\{Z_{u_m(x+L)}(x+L-1)=0\}} \\ &\leq \sum_{k=l_{u_m(x+L)}^{(x)}}^{+\infty} e^{-2\beta \frac{d_0(L)}{2} k} + \sum_{k=l_{u_m(x+L)}^{(x)}}^{+\infty} e^{-2\beta \varepsilon_2 k}. \end{aligned}$$

□

## 6 Asymptotic streams

Given  $L \geq 1$ , assume that  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$  and fix  $x \in \mathbb{Z}$  and  $K \in \mathbb{N}$ . The goal is here to prove Proposition 2.2 in Section 6.1, and Lemma 2.4 in Section 6.2.

### 6.1 Proof of Proposition 2.2

Recall that Proposition 2.2 states that, almost surely, we have :

$$\{R' = \{x, \dots, x+K+1\}\} \subset \bigcap_{j=x+1}^{x+K} \left\{ \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\Delta_k(j)}{k} = 0 \right\}. \quad (6.1)$$

## CHAPITRE 2. STUCK WALKS

---

Proposition 2.2 extends to general  $K \in \mathbb{N}$  the result of Erschler, Tóth and Werner in [38], initially proved for  $K < L + 1$ . Its proof is mainly combinatorial. Let us first state and prove two Lemmas that will be used several times to prove Proposition 2.2.

The only probabilistic tool of the proof is Borel-Cantelli Lemma, which is used to prove the following result.

**Lemme 6.1.** *Let  $\varepsilon > 0$ . There exist two random times  $N_1$  and  $N_2$  depending on  $\varepsilon$  such that :*

- (i) *For all  $j \in \mathbb{Z}$ , and for all  $k \geq N_1$ , if  $\Delta_k(j)/k \geq \varepsilon$  and  $X_k = j$ , then  $X_{k+1} = j + 1$ , and if  $\Delta_k(j)/k \leq -\varepsilon$  and  $X_k = j$ , then  $X_{k+1} = j - 1$ ;*
- (ii) *For all  $k \geq N_2$ , for all  $j \in \mathbb{Z}$ , if  $X_k < j$ , then  $\Delta_k(j)/k < 3\varepsilon/2$  and if  $X_k > j$ , then  $\Delta_k(j)/k > -3\varepsilon/2$ .*

*Démonstration.* Let us prove the first point.

Recall that, for all  $j \in \mathbb{Z}$ , we have

$$\mathbb{P}\left(X_{k+1} = X_k + 1 \middle| \mathcal{F}_k\right) = \frac{1}{1 + e^{-2\beta\Delta_k(X_k)}},$$

which yields :

$$\mathbb{P}\left(X_k = j, X_{k+1} = j + 1, \frac{\Delta_k(j)}{k} \leq -\varepsilon \middle| \mathcal{F}_k\right) \leq \frac{\mathbb{1}_{\{X_k=j\}}}{1 + e^{2\beta\varepsilon k}}.$$

Therefore, we have that

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \left\{X_k = j, X_{k+1} = j \pm 1, \frac{\mp \Delta_k(j)}{k} \geq \varepsilon\right\} \middle| \mathcal{F}_k\right) \leq \frac{2}{1 + e^{2\beta\varepsilon k}},$$

which is summable. Then, by Borel-Cantelli Lemma, there exists a random  $N_1 \in \mathbb{N}$  such that for all  $j \in \mathbb{Z}$ , and for all  $k \geq N_1$ , if  $\Delta_k(j)/k \geq \varepsilon$  and  $X_k = j$ , then  $X_{k+1} = j + 1$ , and if  $\Delta_k(j)/k \leq -\varepsilon$  and  $X_k = j$ , then  $X_{k+1} = j - 1$ .

Let us prove the second point of the Lemma. Let  $N_2$  be the smallest integer such that  $N_2 > 2(1 + \alpha)N_1/3\varepsilon > N_1$  and  $N_2 > 4/\varepsilon$ .

Assume that  $k \geq N_2$  and  $X_k < j$ . Recall that, by definition of  $N_1$ , the walker cannot jump from  $j$  to  $j - 1$  at some time  $k \geq N_1$  if  $\Delta_k(j)/k \geq \varepsilon$ . Recall also the definition of the local time at site  $j$  and at time  $k$  :

$$\Delta_k(j) = -\alpha l_k(j - 1) + l_k(j) - l_k(j + 1) + \alpha l_k(j + 2).$$

First, if the walker has not visited  $j$  between  $N_1$  and  $k$ , then  $\Delta_k(j) \leq \Delta_{N_1}(j) \leq N_1 \times (1 + \alpha)$ , hence

$$\frac{\Delta_k(j)}{k} \leq \frac{\Delta_{N_1}(j)}{N_1} \times \frac{N_1}{N_2} < \frac{3\varepsilon}{2}.$$

Otherwise, let  $k'$  be the last time before  $k$  such that  $X_{k'} = j$ . Then  $X_{k'+1} = j - 1$ , and therefore  $\Delta_{k'}(j)/k' < \varepsilon$ . Note that  $\Delta_k(j) \leq \Delta_{k'}(j) + 1$ , hence

$$\frac{\Delta_k(j)}{k} < \frac{3\varepsilon}{2},$$

which proves the first part of (ii) and the second part is proved by the symmetric argument.  $\square$

Recall that  $L \geq 1$ ,  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$ ,  $K \in \mathbb{N}$  are fixed. The following Lemma uses the results of Section 4 in order to describe the evolutions of the local times at two sites when the walk is stuck between them.

**Lemme 6.2.** *Fix  $i_1, i_2 \in \mathbb{Z}$  such that  $0 < i_2 - i_1 < K$ . Fix two times  $k$  and  $k'$  such that  $k < k'$ .*

*Assume that the walk remains in  $\{i_1, \dots, i_2 + 1\}$  between the time  $k$  and  $k'$  and define*

$$\delta_{\max} := \max \left\{ \left| \frac{\Delta_n(i)}{n} \right| : n \in [k, k'], i \in \{i_1 + 1, \dots, i_2\} \right\}.$$

*Then, there exist two positive constants  $d$  and  $C_1$ , depending on  $\alpha$  and  $K$ , such that*

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{k'}(i_1 + m(i_2 - i_1))}{k'} &> \frac{\Delta_k(i_1 + m(i_2 - i_1))}{k} \times \frac{k}{k'} \\ &\quad + d \times \frac{k' - k}{k'} - 2C_1\delta_{\max}, \\ \frac{\Delta_{k'}(i_2 + 1 - m(i_2 - i_1))}{k'} &< \frac{\Delta_k(i_2 + 1 - m(i_2 - i_1))}{k} \times \frac{k}{k'} \\ &\quad - d \times \frac{k' - k}{k'} + 2C_1\delta_{\max}, \end{aligned}$$

where  $m(k) := (k + 1)\mathbf{1}_{\{k < L\}}$ , for all  $k \in \mathbb{N}$ .

Before proving this result, let us emphasize two simple consequences. First, notice that

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{k'}(i_1 + m(i_2 - i_1))}{k'} &> \min \left( \frac{\Delta_k(i_1 + m(i_2 - i_1))}{k}, d \right) - 2C_1\delta_{\max}, \\ \frac{\Delta_{k'}(i_2 + 1 - m(i_2 - i_1))}{k'} &< \max \left( \frac{\Delta_k(i_2 + 1 - m(i_2 - i_1))}{k}, -d \right) \\ &\quad + 2C_1\delta_{\max}. \end{aligned}$$

Secondly, if

$$\frac{k' - k}{k} \geq \frac{2C_1\delta_{\max}}{d},$$

## CHAPITRE 2. STUCK WALKS

---

then

$$\frac{\Delta_{k'}(i_1 + m(i_2 - i_1))}{k'} > \frac{\Delta_k(i_1 + m(i_2 - i_1))}{k} \times \frac{k}{k'}, \quad (6.2)$$

$$\frac{\Delta_{k'}(i_2 + 1 - m(i_2 - i_1))}{k'} < \frac{\Delta_k(i_2 + 1 - m(i_2 - i_1))}{k} \times \frac{k}{k'}. \quad (6.3)$$

*Démonstration.* Define

$$\begin{aligned} \tilde{l}_i &= \frac{l_{k'}(i_1 + i) - l_k(i_1 + i)}{k' - k}, \text{ for all } i \in \{0, \dots, i_2 - i_1 + 2\}, \\ \text{and } \tilde{d}_i &= -\alpha \tilde{l}_{i-1} + \tilde{l}_i - \tilde{l}_{i+1} + \alpha \tilde{l}_{i+2}, \text{ for all } i \in \{1, \dots, i_2 - i_1\}. \end{aligned}$$

Thus,

$$\tilde{l}_0 = \tilde{l}_{i_2 - i_1 + 2} = 0, \quad \sum_{i=1}^{i_2 - i_1 + 1} \tilde{l}_i = 1 \text{ and } |\tilde{d}_i| < 2\delta_{\max} \times \frac{k'}{k' - k}, \quad \forall i \in \{1, \dots, i_2 - i_1\}.$$

Define also  $\tilde{d}_0 = -\tilde{l}_1 + \alpha \tilde{l}_2$  and  $\tilde{d}_{i_2 - i_1 + 1} = -\alpha \tilde{l}_{i_2} + \tilde{l}_{i_2 + 1}$ .

Recall the notations  $d_0(K')$  and  $d_{K'+1}(K')$  defined in Remark 4.2,  $c(K')$  defined in Proposition 4.7 and define

$$d := \min \{(d_{K'+1}(K') = -d_0(K'), K' = 1, \dots, L - 1), c(L), \dots, c(K)\} > 0. \quad (6.4)$$

Let us consider  $(\tilde{l}_i)$  as a perturbed solution of the linear system  $(E_{i_2 - i_1})$  defined and described in Section 4. Then we have to distinguish two cases :  $i_2 - i_1 \leq L - 1$  and  $i_2 - i_1 \geq L$ .

Indeed, if  $i_2 - i_1 \leq L - 1$ , using Proposition 4.1 and using that  $(E_{i_2 - i_1})$  is a linear system, there exists a positive constant  $C_1$  such that

$$\begin{aligned} \tilde{d}_0 &< -d + C_1 \times 2\delta_{\max} \times \frac{k'}{k' - k}, \\ \tilde{d}_{i_2 - i_1 + 1} &> d - C_1 \times 2\delta_{\max} \times \frac{k'}{k' - k}. \end{aligned}$$

Otherwise, if  $i_2 - i_1 \geq L$ , using Proposition 4.7, we have similarly

$$\begin{aligned} \tilde{d}_0 &> d - C_1 \times 2\delta_{\max} \times \frac{k'}{k' - k}, \\ \tilde{d}_{i_2 - i_1 + 1} &< -d + C_1 \times 2\delta_{\max} \times \frac{k'}{k' - k}. \end{aligned}$$

We can conclude by multiplying these quantities by  $(k' - k)/k'$  and noticing that, for  $i \in \{0, i_2 - i_1 + 1\}$ ,

$$\tilde{d}_i := \frac{\Delta_{k'}(i_1 + i) - \Delta_k(i_1 + i)}{k' - k}.$$

□

Let us now prove Proposition 2.2, i.e. (6.1).

*Proof of Proposition 2.2.* We assume throughout the proof that the probability event  $\{R' = \{x, \dots, x + K + 1\}\}$  holds.

Let us show that there exists a constant  $M := M(\alpha, d, C_1)$  such that, for all  $j \in \{1, \dots, K\}$ , for all  $\varepsilon > 0$  small enough, we have

$$\frac{\Delta_k(x+j)}{k} > -3\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}} \quad (6.5)$$

as soon as  $k$  is large enough. Then the symmetric argument will hold and enable us to conclude. Note that, in fact, the constant  $M$  depends only on  $\alpha$  and  $K$ , since  $d$  and  $C_1$  depend only on  $\alpha$  and  $K$ .

For reasons that will become clear later, we choose  $M$  and  $\varepsilon$  such that

$$M > \frac{3 \times (d + 8C_1)}{d} \times (3 + \alpha) \text{ and } \varepsilon < \frac{2(1 + \alpha) \wedge d}{3M^{K(K+1)}}. \quad (6.6)$$

As  $R' = \{x, \dots, x + K + 1\}$ , there exists a random  $N_3 \in \mathbb{N}$  such that  $Z_\infty(i) = Z_{N_3}(i)$  if  $i \notin R'$ .

Finally, recalling the definitions of  $N_1$  and  $N_2$  in Lemma 6.1, let us define the time  $N := \max(N_1, N_2, N_3, (1 + \alpha)/\varepsilon)$ . We work at large times  $k \geq N$ , and the rest of the proof is only combinatorial.

By definition of  $R'$ , there exists  $k_1 \geq N$  such that  $X_{k_1} = x + K + 1$ . Therefore, using Lemma 6.1, for all  $j \in \{1, \dots, K\}$ ,

$$\frac{\Delta_{k_1}(x+j)}{k_1} > -2\varepsilon.$$

Let us prove by induction on  $j = 1, \dots, K$ , that, for all  $k \geq k_1$ , we have

$$\frac{\Delta_k(x+j)}{k} > -3\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}}.$$

(i) *The base case :  $j = 1$ .* Assume by contradiction that there exists  $\hat{k} \geq k_1$  such that

$$\frac{\Delta_{\hat{k}}(x+1)}{\hat{k}} \leq -3\varepsilon,$$

and define :

$$\tilde{k} := \max \left\{ k \in [k_1, \hat{k}] : \frac{\Delta_k(x+1)}{k} > -2\varepsilon \right\}.$$

## CHAPITRE 2. STUCK WALKS

---

Hence, using Lemma 6.1 between  $\tilde{k}$  and  $\hat{k}$ , the walk remains left-hand from  $x + 1$  and thus stays confined to  $\{x, x + 1\}$ , therefore

$$\frac{\Delta_{\hat{k}}(x + 1)}{\hat{k}} = \frac{\Delta_{\tilde{k}}(x + 1) + (\hat{k} - \tilde{k})}{\tilde{k} + (\hat{k} - \tilde{k})} > -2\varepsilon,$$

which contradicts our assumption.

(ii) *Induction step* : Assume that  $j \in \{1, \dots, K - 1\}$ , and that, for all  $i \in \{1, \dots, j\}$  and  $k \geq k_1$ , we have :

$$\frac{\Delta_k(x + i)}{k} > -3\varepsilon M^{\frac{i(i-1)}{2}}. \quad (6.7)$$

We want to show that, for all  $k \geq k_1$ ,

$$\frac{\Delta_k(x + j + 1)}{k} > -3\varepsilon M^{\frac{j(j+1)}{2}}.$$

By contradiction, assume that there exists a finite integer  $k^*$  such that

$$k^* := \min \left\{ k \geq k_1 : \frac{\Delta_k(x + j + 1)}{k} \leq -3\varepsilon M^{\frac{j(j+1)}{2}} \right\} < \infty. \quad (6.8)$$

By definition of  $R'$ , there exists  $k_2 > k^*$  such that  $X_{k_2} = x + K + 1$ , and, using Lemma 6.1,

$$\frac{\Delta_{k_2}(x + j + 1)}{k_2} > -2\varepsilon.$$

Define the following times :

$$\underline{k} := \max_k \left\{ k_1 \leq k \leq k^* : \frac{\Delta_k(x + j + 1)}{k} > -3\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}} \right\}, \quad (6.9)$$

$$\bar{k} := \min_k \left\{ k^* \leq k \leq k_2 : \frac{\Delta_k(x + j + 1)}{k} > -3\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}} \right\}. \quad (6.10)$$

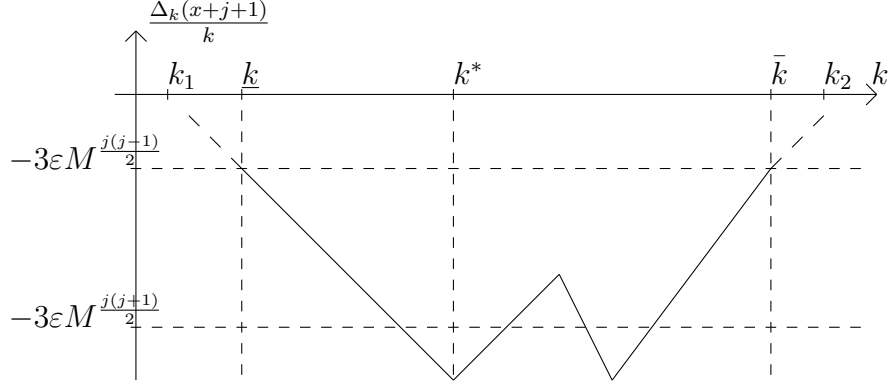
Note that the definitions of  $k_1$ ,  $\underline{k}$ ,  $k^*$ ,  $\bar{k}$  and  $k_2$  will be kept throughout the proof. All other notations used to define some other times change from part to part.

We need the following lemma, which will be shown right after this proof.

**Lemme 6.3.** *Under the previous assumptions, in particular assuming (6.7) and (6.8), for all  $i \in \{1, \dots, j\}$ , and for all  $k$  such that  $\underline{k} \leq k \leq \bar{k}$ , we have :*

$$\left| \frac{\Delta_k(x + i)}{k} \right| < 3\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2} + (j-i)}.$$



FIGURE 2.2 – Local stream at  $x + j + 1$ 

Assuming that (6.8) holds, the times  $\underline{k}, k^*, \bar{k}$  are key-times at which we know the behavior of the local stream at  $x + j + 1$ , see Figure 2.2. Using Lemma 6.3 and Lemma 6.2, we will compare the evolution of the local times on the interval  $\{x, \dots, x + j + 1\}$  to the solution of the system  $(E_j)$ , defined in Section 4.1.

This will enable us to emphasize some contradictions about the evolution of the local streams and conclude that (6.8) cannot hold.

Let us distinguish between two cases :  $j \leq L - 1$  and  $j \geq L$ .

First, assume that  $j \leq L - 1$ . By Lemma 6.1, the walker remains left-hand from  $x + j + 1$  on  $[\underline{k}, k^*]$ , thus the walk is confined to  $\{x, \dots, x + j + 1\}$  on this time-span. Moreover, notice that, at each time-step,  $\Delta_k(x + j + 1)$  varies by 0,  $\pm 1$  or  $\pm \alpha$ . Using the definitions (6.9) of  $\underline{k}$  and (6.8) of  $k^*$ , and using (6.6), this yields :

$$\begin{aligned}
 \frac{k^* - \underline{k}}{k^*} &> \frac{1}{1 + \alpha} \times \frac{-\Delta_{k^*}(x + j + 1) + \Delta_{\underline{k}}(x + j + 1)}{k^*} \\
 &> \frac{1}{1 + \alpha} \left( 3\varepsilon M^{\frac{j(j+1)}{2}} - 3\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}} \right) \geq \frac{3\varepsilon M^{\frac{j(j+1)}{2}-1}}{1 + \alpha} (M - 1) \\
 &> \frac{6C_1\varepsilon M^{\frac{j(j+1)}{2}-1}}{d}.
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Hence, using (6.2), deduced from Lemma 6.2, with  $i_1 = x$ ,  $i_2 = x + j$ ,  $k = \underline{k}$  and  $k' = k^*$ , and using Lemma 6.3, this yields

$$\frac{\Delta_{k^*}(x + j + 1)}{k^*} > \frac{\Delta_{\underline{k}}(x + j + 1)}{\underline{k}} \times \frac{\underline{k}}{k^*} > -3\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}},$$

where we use the definition (6.9) of  $\underline{k}$  for the last inequality. This contradicts the definition (6.8) of  $k^*$  and concludes the first case  $j \leq L - 1$ .

## CHAPITRE 2. STUCK WALKS

---

Now, assume that  $j \geq L$ . Similarly, by Lemma 6.1, the walk is confined to  $\{x, \dots, x + j + 1\}$  on the time-span  $[k^*, \bar{k}]$ . Recall the definition (6.8) of  $k^*$ , (6.6), and that  $d > 3\varepsilon M^{\frac{j(j+1)}{2}}$ . Then, using the upper-bound of Lemma 6.2 with  $i_1 = x$ ,  $i_2 = x + j$ ,  $k = k^*$  and  $k' = \bar{k}$ , and using Lemma 6.3, this yields

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{\bar{k}}(x + j + 1)}{\bar{k}} &< -3\varepsilon M^{\frac{j(j+1)}{2}} + 6C_1\varepsilon M^{\frac{j(j+1)}{2}-1} \\ &< -3\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}}, \end{aligned}$$

This contradicts the definition (6.10) of  $\bar{k}$  and finishes the second case, the induction step, and the proof of Proposition 2.2.  $\square$

*Proof of Lemma 6.3.* By assumption (6.7), we know that, for all  $i \in \{1, \dots, j\}$  and for all  $k \geq k_1$ ,

$$\frac{\Delta_k(x + i)}{k} > -3\varepsilon M^{\frac{i(i-1)}{2}} \geq -3\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2} + (j-i)}.$$

Thus, it remains to prove that, for all  $k \in [\underline{k}, \bar{k}]$ ,

$$\frac{\Delta_k(x + i)}{k} < 3\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2} + (j-i)}. \quad (6.12)$$

We will proceed in the same way as in the previous proof, by induction for  $i = j, \dots, 1$ .

(i) *The base case :  $i = j$ .* Notice that  $\Delta_{\underline{k}}(x + j)/\underline{k} < 2\varepsilon$  as  $\Delta_{\underline{k}+1}(x + j)/(\underline{k} + 1) < 0$  by definition (6.9) of  $\underline{k}$ .

Now, let us derive this result on the whole time-span  $[\underline{k}, \bar{k}]$ , by proving that, for all  $k \in [\underline{k}, \bar{k}]$ ,  $\Delta_k(x + j)/k < 3\varepsilon$ . By contradiction, assume that there exists  $\hat{k} \in (\underline{k}, \bar{k}]$ , such that

$$\frac{\Delta_{\hat{k}}(x + j)}{\hat{k}} \geq 3\varepsilon,$$

and let  $\tilde{k}$  the last time before  $\hat{k}$  such that  $\Delta_{\tilde{k}}(x + j)/\tilde{k} < 2\varepsilon$ , i.e.

$$\tilde{k} := \max \left\{ k \in [\underline{k}, \hat{k}] : \frac{\Delta_k(x + j)}{k} < 2\varepsilon \right\}.$$

Thus, using Lemma 6.1, the walk is confined to  $\{j, j + 1\}$  on the time-span  $[\tilde{k}, \hat{k}]$ . It implies

$$\frac{\Delta_{\hat{k}}(x + j)}{\hat{k}} = \frac{\Delta_{\tilde{k}}(x + j) - (\hat{k} - \tilde{k})}{\tilde{k} + (\hat{k} - \tilde{k})} < 2\varepsilon,$$

which contradicts our assumptions.

Therefore, for all  $k \in [\underline{k}, \bar{k}]$ ,

$$\frac{\Delta_k(x+j)}{k} < 3\varepsilon \leq 3\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}}.$$

(ii) *The induction step* : Assume that, for all  $m \in \{i+1, \dots, j\}$ ,  $i \geq 1$ , and for all  $k \in [\underline{k}, \bar{k}]$ ,

$$\left| \frac{\Delta_k(x+m)}{k} \right| < 3\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2} + (j-m)}. \quad (6.13)$$

Let us prove this inequality for  $m = i$ . More precisely, using (6.7), it remains to prove that :

$$\frac{\Delta_k(x+i)}{k} < 3\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2} + (j-i)}, \text{ for all } k \in [\underline{k}, \bar{k}]. \quad (6.14)$$

We will now use Lemma 6.2, distinguishing between two cases :  $j - i \leq L - 1$  and  $j - i \geq L$ .

(ii.a) *Assume that  $j - i \leq L - 1$ .*

Let us start by proving that

$$\frac{\Delta_k(x+i)}{k} < \frac{3}{2}\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2} + (j-i)}, \quad (6.15)$$

and we will then prove (6.14) by deriving this property on the whole time-span  $[\underline{k}, \bar{k}]$ . By contradiction, assume that

$$\frac{\Delta_k(x+i)}{k} \geq \frac{3}{2}\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2} + (j-i)}.$$

Note that, using Lemma 6.1 and recalling the definition (6.9) of  $\underline{k}$  and (6.10) of  $\bar{k}$ , the walk is confined to  $\{x+i, \dots, x+j+1\}$  as long as  $\Delta_k(x+i)/k \geq \varepsilon$  and  $k \leq \bar{k}$ . As  $|\Delta_{k+1}(x+i) - \Delta_k(x+i)| \leq 1 + \alpha$ , the walk stays on the right of  $x+i$  at least until the time  $\hat{k}$ , which is the integer defined by

$$\hat{k} := \left\lfloor \frac{1 + \alpha + \frac{3}{2}\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2} + (j-i)}}{1 + \alpha + \varepsilon} \bar{k} \right\rfloor, \quad (6.16)$$

where  $\lfloor \cdot \rfloor$  is the floor function. Using (6.11), using that  $\underline{k} > 1/\varepsilon$  and  $d < 1$ , let us prove that  $\hat{k} \in (\underline{k}, k^*)$  :

$$k^* - \hat{k} = (k^* - \underline{k}) - (\hat{k} - \underline{k})$$

## CHAPITRE 2. STUCK WALKS

---

$$> \underline{k} \left( 6C_1 \varepsilon M^{\frac{j(j+1)}{2}-1} - \frac{3}{2} \varepsilon M^{\frac{j(j+1)}{2}-i} \right) + \varepsilon \underline{k} - 1 > 0.$$

Hence, using Lemma 6.1, the walk is confined to  $\{x+i, \dots, x+j+1\}$  on the time-span  $[\underline{k}, \widehat{k}]$ . Moreover, using (6.16) and (6.6),

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{k} - \underline{k}}{\widehat{k}} &> \frac{\frac{3}{2} \varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}+(j-i)} - \varepsilon}{1 + \alpha + \frac{3}{2} \varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}+(j-i)}} > \frac{\frac{3}{2} \varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}+(j-i)} - \varepsilon}{2(1 + \alpha)} \\ &> \frac{6C_1 \varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}+(j-i)-1}}{d} \left( \frac{M \times d}{4C_1(1 + \alpha)} - \frac{d}{12C_1(1 + \alpha)} \right) \\ &> \frac{6C_1 \varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}+(j-i)-1}}{d}. \end{aligned}$$

Thus, using (6.2) with  $i_1 = x+i$ ,  $i_2 = x+j$ ,  $k = \underline{k}$  and  $k' = \widehat{k}$ , and using the hypothesis (6.13), we obtain

$$\frac{\Delta_{\widehat{k}}(x+j+1)}{\widehat{k}} > \frac{\Delta_{\underline{k}}(x+j+1)}{\underline{k}} \times \frac{\underline{k}}{\widehat{k}} > -3\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}},$$

which contradicts the definitions (6.9) of  $\underline{k}$  and (6.8) of  $k^*$ , and we can conclude that (6.15) holds.

Now, let us derive (6.15) for the whole time-span  $[\underline{k}, \bar{k}]$ : in other words, let us prove (6.14), which states that, for all  $k \in [\underline{k}, \bar{k}]$ ,

$$\frac{\Delta_k(x+i)}{k} < 3\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}+(j-i)}.$$

By contradiction, assume that there exists  $\widehat{k} \in [\underline{k}, \bar{k}]$  such that

$$\frac{\Delta_{\widehat{k}}(x+i)}{\widehat{k}} \geq 3\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}+(j-i)}, \quad (6.17)$$

and define  $\widetilde{k}$  such that

$$\widetilde{k} := \max \left\{ k \in [\underline{k}, \widehat{k}] : \frac{\Delta_k(x+i)}{k} < \frac{3}{2} \varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}+(j-i)} \right\}. \quad (6.18)$$

Using that  $|\Delta_{k+1}(x+i) - \Delta_k(x+i)| \leq 1 + \alpha$ , we have that

$$\frac{\widehat{k} - \widetilde{k}}{\widehat{k}} > \frac{1}{1 + \alpha} \left( 3\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}+(j-i)} - \frac{3}{2} \varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}+(j-i)} \right)$$

$$> 3\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}+(j-i)-1} \times \frac{M}{2(1+\alpha)} > \frac{6C_1\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}+(j-i)-1}}{d}.$$

Using Lemma 6.1, the walk is confined to  $\{x+i, \dots, x+j+1\}$  on the time-span  $[\tilde{k}, \hat{k}]$ . Using (6.3), deduced from Lemma 6.2, with  $i_1 = x+i$ ,  $i_2 = x+j$ ,  $k = \tilde{k}$  and  $k' = \hat{k}$ , and using the hypothesis (6.13), we obtain

$$\frac{\Delta_{\tilde{k}}(x+i)}{\hat{k}} < \frac{\Delta_{\tilde{k}}(x+i)}{\tilde{k}} \times \frac{\tilde{k}}{\hat{k}} < \frac{3}{2}\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}+(j-i)},$$

which contradicts assumption (6.17), proves (6.14) and finishes the first case  $j-i \leq L-1$ .

(ii.b) Assume that  $j-i \geq L$ .

Here, we directly prove (6.14). By contradiction, assume that there exists  $\tilde{k} \in [\underline{k}, \bar{k}]$  such that

$$\frac{\Delta_{\tilde{k}}(x+i)}{\tilde{k}} \geq 3\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}+(j-i)}, \quad (6.19)$$

which implies, by Lemma 6.1, that  $X_{\tilde{k}} \in \{x+i, \dots, x+j+1\}$ . Let us prove that the walker stays stuck forever in this interval. In other words, let us prove by induction that  $X_{\hat{k}} \in \{x+i, \dots, x+j+1\}$  for all  $\hat{k} \geq \tilde{k}$ . This will contradict the definition of  $R'$  and enable us to conclude.

Assume, for  $\hat{k} \geq \tilde{k}$ , that  $X_m \in \{x+i, \dots, x+j+1\}$  for all  $m \in [\tilde{k}, \hat{k}]$ , and let us prove that  $X_{\hat{k}+1} \in \{x+i, \dots, x+j+1\}$ .

On one hand, using that  $d > 3\varepsilon M^{K(K+1)}$  by (6.6), using (6.19), and applying Lemma 6.2, with  $i_1 = x+i$ ,  $i_2 = x+j$ ,  $k = \tilde{k}$  and  $k' = \hat{k}$ , with the hypothesis (6.13), we obtain

$$\frac{\Delta_{\hat{k}}(x+i)}{\hat{k}} \geq 3\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}+(j-i)} - 6C_1\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}+(j-i)-1} > \varepsilon.$$

Thus, using Lemma 6.1, if  $X_{\hat{k}} = x+i$  then  $X_{\hat{k}+1} = x+i+1$ .

On the other hand, if  $\hat{k} \leq k^*$ , then  $\Delta_{\hat{k}}(x+j+1)/\hat{k} < -\varepsilon$  and, therefore, by Lemma 6.1, if  $X_{\hat{k}} = x+j+1$ , then  $X_{\hat{k}+1} = x+j$ . Otherwise, if  $\hat{k} > k^*$ , applying Lemma 6.2, with  $i_1 = x+i$ ,  $i_2 = x+j$ ,  $k = k^*$  and  $k' = \hat{k}$ , with the hypothesis (6.13), and using (6.8) and (6.6), we obtain

$$\frac{\Delta_{\hat{k}}(x+j+1)}{\hat{k}} < -3\varepsilon M^{\frac{j(j+1)}{2}} + 6C_1\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}+(j-i)-1} < -3\varepsilon M^{\frac{j(j-1)}{2}}.$$

Thus, again using Lemma 6.1, if  $X_{\hat{k}} = x+j+1$  then  $X_{\hat{k}+1} = x+j$ . Therefore, by induction, this implies that  $X_{\hat{k}} \in \{x+i, \dots, x+j+1\}$  for all  $\hat{k} \geq \tilde{k}$ , which contradicts the definition of  $R'$  and concludes the second case,  $j-i \geq L$ , and the proof of the lemma.  $\square$

## 6.2 Proof of Lemma 2.4

Fix  $L \geq 1$  and  $\alpha \in (\alpha_{L+1}, \alpha_L)$ . Let  $x, K \in \mathbb{Z}$  such that  $K \geq L$ , and fix  $a > 0$ . Recall that Lemma 2.4 states that, almost surely,

$$\{R' = \{x, x+1, \dots, x+K+1\}\} \subset \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} e^{a\beta[l_k(x+L+2) - \alpha l_k(x+L+1)]} < +\infty \right\}.$$

*Proof of Lemma 2.4.* Let us work on the event  $\{R' = \{x, x+1, \dots, x+K+1\}\}$ , where  $K \geq L$ .

First, note that there exists a.s.  $N_1 \in \mathbb{N}$  such that, for all  $k \geq N_1$ ,  $X_k \in R'$ . Then, we use Proposition 2.2, which implies that for all  $\varepsilon > 0$ , there a.s. exists  $N_2 \in \mathbb{N}$  such that for all  $j \in \{x+1, \dots, x+K\}$  and for all  $k \geq N_2$ ,

$$\left| \frac{\Delta_k(j)}{k} \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Define  $N := \max(N_1, N_2)$ .

We need the results on the linear system presented in Proposition 4.7. Notice that, if  $(\tilde{l}_0, \dots, \tilde{l}_{K+2})$  is such that  $\tilde{l}_0 = 0$ ,  $\sum_{j=1}^{K+2} \tilde{l}_j = 1$ , and  $|\tilde{d}_j| < \varepsilon$  for all  $j = 1, \dots, K$ , where  $\tilde{d}_j$  is defined as in (4.1), then this vector can be seen as a perturbed solution of the linear system  $(E_K)$ . Thus, by Proposition 4.7,  $\tilde{l}_{L+2} - \alpha \tilde{l}_{L+1} < -c(K)/2$  as soon as  $\varepsilon$  is small enough, depending on  $K$  and  $\alpha$ .

Then, for any  $k \geq 2N$ , define for all  $j \in \{0, \dots, K+2\}$ ,

$$\tilde{l}_j = \frac{l_k(x+j) - l_N(x+j)}{k - N}.$$

Then we have  $\tilde{l}_0 = \tilde{l}_{K+2} = 0$ ,  $\sum_{j=1}^{K+2} \tilde{l}_j = 1$  and, for all  $j \in \{1, \dots, K\}$ ,

$$|\tilde{d}_j| \leq \frac{|\Delta_k(x+j)| + |\Delta_N(x+j)|}{k} \times \frac{k}{k - N} < \varepsilon.$$

This implies, as soon as  $\varepsilon > 0$  is small enough, that

$$\frac{(l_k(L+2) - l_N(L+2)) - \alpha(l_k(L+1) - l_N(L+1))}{k - N} < -\frac{c(K)}{2},$$

therefore, for any  $a > 0$ , we can conclude the proof with

$$\sum_{k=2N}^{+\infty} e^{a\beta[l_k(L+2) - \alpha l_k(L+1)]} \leq e^{a\beta[l_N(L+2) - \alpha l_N(L+1)]} \times \sum_{k=2N}^{+\infty} e^{-a\frac{c(K)}{2}(k-N)} < +\infty.$$

□

## 7 Proof of Theorem 1.5

The goal of this section is to prove that if  $\alpha > 1 = \alpha_2$ , then the walk localizes on 3 vertices almost surely.

*Démonstration.* Fix  $x \in \mathbb{Z}$ . We want to prove that  $\mathbb{P}(R' = \{x, x+1, x+2, x+3\}) = 0$ . We will then conclude by taking the union over  $x$  and using Theorem 1.4.

Let us first prove the following lemma.

**Lemme 7.1.** *For any constant  $C > 0$ , on the event  $\{R' = x, x+1, x+2, x+3\}$ , there a.s. exist infinitely many  $k$ 's such that one of the following statements holds :*

- $X_k = x+1$ ,  $\Delta_k(x+1) \leq -C$  and  $\Delta_k(x+1) + \Delta_k(x+2) \leq -C$  ;
- $X_k = x+2$ ,  $\Delta_k(x+2) \geq C$  and  $\Delta_k(x+1) + \Delta_k(x+2) \geq C$ .

Let  $\mathcal{K}$  be the set of those  $k$ 's.

*Démonstration.* Let us work on the event  $\{R' = \{x, x+1, x+2, x+3\}\}$ .

Using Lemma 2.2, and solving equation  $(E_K)$  in the case  $L = 2$ , one can deduce that  $Z_k(x+1)/Z_k(x)$  converges to  $\alpha + 2$  (see Proposition 4.1).

Using the Conditional Borel-Cantelli Lemma (see [31], chapter 4, (4.11)), we have, a.s.,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^m \mathbb{1}_{\{X_k = x+1\}} \mathbb{P}(X_{k+1} = x | \mathcal{F}_k)}{Z_m(x)} = 1.$$

This implies that, for any  $\varepsilon > 0$ , there exist infinitely many  $k$ 's such that  $X_k = x+1$  and  $\mathbb{P}(X_{k+1} = x | \mathcal{F}_k) > \frac{1}{\alpha+2} - \varepsilon$ , and there exist infinitely many  $k$ 's such that  $X_k = x+1$  and  $\mathbb{P}(X_{k+1} = x | \mathcal{F}_k) < \frac{1}{\alpha+2} + \varepsilon$ . Otherwise, this would contradict the Conditional Borel-Cantelli Lemma.

Then, there exists a positive constant  $c_{\max}$  (resp.  $c_{\min}$ ), depending only on  $\alpha$  and  $\beta$ , such that  $X_k = x+1$  and  $\Delta_k(x+1) < c_{\max}$  (resp.  $\Delta_k(x+1) > -c_{\min}$ ) for infinitely many  $k$ 's. If  $k$  is large enough, then the walk does not leave the set  $\{x, \dots, x+3\}$ . Therefore  $\Delta_k(x+1)$  decreases at most by  $2\beta$  between two times where the walker is in  $x+1$ . Hence, there exist infinitely many  $k$ 's such that  $X_k = x+1$  and

$$-c_{\min} \leq \Delta_k(x+1) \leq c_{\max}.$$

Notice that we could give some explicit bounds  $c_{\min}$  and  $c_{\max}$  but it is not useful.

Now, notice that, on the event  $\{R' = \{x, x+1, x+2, x+3\}\}$ ,  $\lim_k \Delta_k(x) = +\infty$ . Therefore, on this event, there exist infinitely many  $k$ 's such that :  $-c_{\min} \leq \Delta_k(x+1) \leq c_{\max}$ ,  $X_k = x+1$  and  $\Delta_k(x) \geq C$ , for any constant  $C > 0$ .

Then, assume that

$$k_0 \in \{k \in \mathbb{N} : -c_{\min} \leq \Delta_k(x+1) \leq c_{\max}, X_k = x+1, \Delta_k(x) \geq C\},$$

## CHAPITRE 2. STUCK WALKS

---

and let us prove that :

$$\mathbb{P}(\exists k \in [k_0, M + k_0] : k \in \mathcal{K} | \mathcal{F}_{k_0}) \geq \delta > 0, \quad (7.1)$$

where  $M := M(C, \alpha, \beta)$  and  $\delta := \delta(C, \alpha, \beta)$  are two positive constants.

To finish this proof, let us consider two cases :  $\Delta_{k_0}(x+1) + \Delta_{k_0}(x+2) < C$  and  $\Delta_{k_0}(x+1) + \Delta_{k_0}(x+2) \geq C$ . Let us show, in each case, that (7.1) holds. This will imply the conclusion, by applying again the Conditional Borel-Cantelli Lemma.

(i) Assume that  $\Delta_{k_0}(x+1) + \Delta_{k_0}(x+2) < C$ . As  $-c_{\min} \leq \Delta_{k_0}(x+1) \leq c_{\max}$ , this implies that  $\Delta_{k_0}(x+2) < c_{\min} + C$ . Then we have some control on the conditional probabilities to go from  $x$  to  $x+1$ , from  $x+1$  to  $x$  and  $x+2$ , and to go from  $x+2$  to  $x+1$ . This implies that we can control the probabilities of the following trajectories : the walker starts at  $x+1$  at time  $k_0$  ; he crosses, say  $2T$  times, the edge  $\{x, x+1\}$ , coming back to  $x+1$  ; then the walker crosses roughly  $2T + C + c_{\max}$  times the edge  $\{x+1, x+2\}$ , coming back to  $x+1$  at some time  $k_1$ . Note that, on these trajectories, the walker only visits the sites  $x, x+1$  and  $x+2$  between the times  $k_0$  and  $k_1$ .

We deduce that, with probability bounded below by a constant depending only on  $C, \alpha$  and  $\beta$ , there exists

$$k_1 \in \left[ k_0, k_0 + C + c_{\max} + 4 \left( 1 + \frac{C}{\alpha - 1} \right) \right],$$

such that  $X_{k_1} = x+1$  and :

$$\begin{aligned} l_{k_1}(x+1) - l_{k_0}(x+1) &\geq 2C/(\alpha - 1), \\ l_{k_1}(x+2) - l_{k_0}(x+2) &\geq l_{k_1}(x+1) - l_{k_0}(x+1) + C + c_{\max}, \\ l_{k_1}(x) - l_{k_0}(x) = l_{k_1}(x+3) &- l_{k_0}(x+3) = l_{k_1}(x+4) - l_{k_0}(x+4) = 0. \end{aligned}$$

Moreover, notice that, for all  $k$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_k(x+1) + \Delta_k(x+2) &= -(\alpha - 1)(l_k(x+1) - l_k(x+3)) \\ &\quad - \alpha l_k(x) + \alpha l_k(x+4). \end{aligned} \quad (7.2)$$

We can now conclude that  $\Delta_{k_1}(x+1) \leq -C$  and  $\Delta_{k_1}(x+1) + \Delta_{k_1}(x+2) \leq -C$ .

(ii) Assume that  $\Delta_{k_0}(x+1) + \Delta_{k_0}(x+2) \geq C$  and recall that  $-c_{\min} \leq \Delta_{k_0}(x+1) \leq c_{\max}$ . Let us prove that, with probability bounded below by a constant depending only on  $C, \alpha$  and  $\beta$ , there exists  $k_1 \geq k_0$  such that  $X_{k_1} = x+2$ ,  $\Delta_{k_1}(x+2) > C$  and  $\Delta_{k_1}(x+1) + \Delta_{k_1}(x+2) \geq C$ .

First notice, by (7.2), that the visits to the edge  $\{x+1, x+2\}$  do not change the value of  $\Delta_{k_0}(x+1) + \Delta_{k_0}(x+2)$ .



If  $\Delta_{k_0}(x+2) > C$ , then, with probability bounded below by a constant depending only on  $C$ ,  $\alpha$  and  $\beta$ ,  $k_1 = k_0 + 1$  because the walker just needs to jump from  $x+1$  to  $x+2$ . Otherwise,  $C - c_{\max} \leq \Delta_{k_0}(x+2) \leq C$  and we have some control on the conditional probabilities to jump from  $x+1$  to  $x+2$  and from  $x+2$  to  $x+1$ , and we can lower-bound the probability to cross only the edge  $\{x+1, x+2\}$ , at least  $c_{\max}$  times. Thus, with probability bounded below by a constant depending only on  $C$ ,  $\alpha$  and  $\beta$ , there exists  $k_1 \in [k_0, k_0 + c_{\max} + 2]$  such that  $X_{k_1} = x+2$ ,  $\Delta_{k_1}(x+2) > C$  and  $\Delta_{k_1}(x+1) + \Delta_{k_1}(x+2) \geq C$ .

□

Let us define by induction a non-decreasing sequence of stopping times. First, define the time  $\tau_0 := \inf_k \{k \geq 0 : k \in \mathcal{K}\}$ , then define, for all  $n \geq 0$  :

$$\begin{aligned}\tau_{2n+1} &:= \inf_k \{k \geq \tau_{2n} : X_k = (x+3)\mathbb{1}_{\{X_{\tau_{2n}}=x+1\}} + x\mathbb{1}_{\{X_{\tau_{2n}}=x+2\}}\}, \\ \tau_{2(n+1)} &:= \inf_k \{k \geq \tau_{2n+1} : X_k \in \mathcal{K}\}.\end{aligned}$$

Notice that :

$$\{R' = \{x, x+1, x+2, x+3\}\} \subset \bigcap_n \{\tau_n < +\infty\}.$$

Let us prove that :

$$\mathbb{P}(\tau_{2n+1} < \infty | \mathcal{F}_{\tau_{2n}}) \mathbb{1}_{\{\tau_{2n} < +\infty\}} < 1 - \delta,$$

for some  $\delta > 0$ , which depends only on  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $C$ . This will enable us to conclude.

First, assume that some vector  $(l_0, l_1, l_2, l_3)$  is such that  $l_0 \geq 0$ ,  $l_3 = 0$ ,  $-\alpha l_0 + l_1 - l_2 = d_1 \in \mathbb{R}$ , and  $l_1 + l_2 = 1$ . Define  $d_2 := -\alpha l_1 + l_2$ , then one can easily compute  $d_2$  as a function of  $d_1$  and  $l_0$ , and prove that :

$$d_1 + d_2 = -\frac{\alpha-1}{2} - \frac{\alpha-1}{2}d_1 - \alpha\frac{1+\alpha}{2}l_0. \quad (7.3)$$

Note that this is a particular case of Corollary 4.6.

Now, assume that  $\{\tau_{2n} < +\infty\}$ , and recall that  $\tau_{2n} \in \mathcal{K}$ . We will finish the proof assuming that  $X_{\tau_{2n}} = x+1$ ,  $\Delta_{\tau_{2n}}(x+1) \leq -C$  and  $\Delta_{\tau_{2n}}(x+1) + \Delta_{\tau_{2n}}(x+2) \leq -C$ . The other case, if  $X_{\tau_{2n}} = x+2$ , is the exact symmetric of this one.

For any  $k > \tau_{2n}$ , as long as  $l_k(x+3) - l_{\tau_{2n}}(x+3) = 0$ , defining for all  $j \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$l_j = \frac{l_k(x+j) - l_{\tau_{2n}}(x+j)}{l_k(x+1) - l_{\tau_{2n}}(x+1) + l_k(x+2) - l_{\tau_{2n}}(x+2)},$$

## CHAPITRE 2. STUCK WALKS

---

we deduce, using (7.3), that

$$\begin{aligned}
\Delta_k(x+1) + \Delta_k(x+2) &= \Delta_k(x+1) + \Delta_k(x+2) \\
&\quad - \Delta_{\tau_{2n}}(x+1) - \Delta_{\tau_{2n}}(x+2) \\
&\quad + \Delta_{\tau_{2n}}(x+1) + \Delta_{\tau_{2n}}(x+2) \\
&\leq -\frac{\alpha-1}{2} \left( l_k(x+1) + l_k(x+2) \right) \\
&\quad - \frac{\alpha-1}{2} \left( -l_{\tau_{2n}}(x+1) - l_{\tau_{2n}}(x+2) \right) \\
&\quad - \frac{\alpha-1}{2} \left( \Delta_k(x+1) - \Delta_{\tau_{2n}}(x+1) \right) - C.
\end{aligned}$$

This inequality also holds when  $k = \tau_{2n}$ . Thus, for any  $k \geq \tau_{2n}$ , if

$$\Delta_k(x+1) - \Delta_{\tau_{2n}}(x+1) > -\frac{1}{2} \left( l_k(x+1) + l_k(x+2) - l_{\tau_{2n}}(x+1) - l_{\tau_{2n}}(x+2) \right),$$

then

$$\Delta_k(x+1) + \Delta_k(x+2) < -\frac{\alpha-1}{4} \left( l_k(x+1) + l_k(x+2) - l_{\tau_{2n}}(x+1) - l_{\tau_{2n}}(x+2) \right) - C,$$

otherwise, as  $\Delta_{\tau_{2n}}(x+1) \leq -C$ ,

$$\Delta_k(x+1) \leq -\frac{1}{2} \left( l_k(x+1) + l_k(x+2) - l_{\tau_{2n}}(x+1) - l_{\tau_{2n}}(x+2) \right) - C.$$

To conclude, we just have to notice that

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\tau_{2n+1} < \infty | \mathcal{F}_{\tau_{2n}}) \mathbf{1}_{\{\tau_{2n} < +\infty\}} \\
&\leq \sum_{k=\tau_{2n}}^{\infty} \mathbb{E} \left( \frac{\mathbf{1}_{\{X_k=x+1, l_k(x+3)=l_{\tau_{2n}}(x+3)\}}}{1 + e^{-2\beta\Delta_k(x+1)}} \frac{1}{1 + e^{-2\beta\Delta_k(x+2)}} \middle| \mathcal{F}_{\tau_{2n}} \right) \\
&\leq \sum_{k=\tau_{2n}}^{\infty} \mathbb{E} \left( \mathbf{1}_{\{X_k=x+1, l_k(x+3)=l_{\tau_{2n}}(x+3)\}} e^{2\beta\Delta_k(x+1)} \wedge e^{2\beta[\Delta_k(x+1)+\Delta_k(x+2)]} \middle| \mathcal{F}_{\tau_{2n}} \right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\beta[(\frac{\alpha-1}{4} \wedge \frac{1}{2})k+C]} \\
&\leq \frac{e^{2\beta(\frac{\alpha-1}{4} \wedge \frac{1}{2})}}{2\beta(\frac{\alpha-1}{4} \wedge \frac{1}{2})} e^{-C} \\
&\leq 1 - \delta,
\end{aligned}$$

choosing  $C = C(\alpha, \beta)$  large enough and for some  $\delta = \delta(\alpha, \beta) > 0$ . This concludes the proof.  $\square$

## 8 Generalizations

In [38], interesting generalizations are proposed, including a model where the interaction depends on more than four neighbouring edges, i.e. replacing the definition of  $\Delta_n(j)$  by :

$$\alpha_k l_n(j - k) + \dots + \alpha_1 l_n(j - 1) + \alpha_0 l_n(j) - \alpha_0 l_n(j + 1) - \dots - \alpha_k l_n(j + 1 + k),$$

for some  $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ . The techniques of [38], as it is noticed therein, seem to be adaptable to derive results about such models, by investigating the behavior of the associated generalized Fibonacci sequence. Moreover, in some cases, we believe that our techniques are also adaptable. In particular, we could adapt the variant of Rubin's construction as it is done in the present paper and apply it to these models, as soon as  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  are nonpositive. The parameter  $\alpha_0$  could be positive. In these cases, we could recover some sort of weight function, which could be decreasing with respect to the local times on neighbouring edges but non-decreasing with respect to local times on edges further away. More precisely, one could prove a generalized version of Lemma 3.2 and prove that all the results of Section 3 hold for a process  $X'$  as soon as it is described by the following transition probability :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X'_{k+1} = X'_k - 1 | \mathcal{F}_k) \\ &= \frac{\tilde{w}(Z_k(X'_k - 1), \dots, Z_k(X'_k - n_0))}{\tilde{f}^-(X'_k, N_k(X'_k, X'_k - 1))} \\ &= \frac{\tilde{w}(Z_k(X'_k - 1), \dots, Z_k(X'_k - n_0))}{\tilde{f}^-(X'_k, N_k(X'_k, X'_k - 1))} + \frac{\tilde{w}(Z_k(X'_k + 1), \dots, Z_k(X'_k + n_0))}{\tilde{f}^+(X'_k, N_k(X'_k, X'_k + 1))}, \end{aligned}$$

for some  $n_0 \in \mathbb{N}$  and for any  $k \in \mathbb{N}$ , where the functions  $\tilde{f}^\pm$  are positive and where  $\tilde{w}$  is positive and non-decreasing with respect to each variable. Note that the resulting term  $\tilde{w}/\tilde{f}^\pm$  can be non-monotonic.

Finally, we refer the reader to the concluding remarks of [38], that have been very useful to the author to learn more about some open problems directly related to the model studied in the current paper.

**Acknowledgements.** *I would like to thank my PhD advisor Pierre Tarrès for introducing me to this problem, for motivating discussions and for uncountably many comments on earlier versions of this work.*



# 3

## Local trapping for elliptic random walks in random environments in $\mathbb{Z}^d$ , joint work with Alexander Fribergh

We consider elliptic random walks in i.i.d. random environments on  $\mathbb{Z}^d$ . The main goal of this paper is to study under which ellipticity conditions local trapping occurs. Our main result is to exhibit an ellipticity criterion for ballistic behavior which extends previously known results. We also show that if the annealed expected exit time of a unit hypercube is infinite then the walk has zero asymptotic velocity.

## 1 Introduction

In this paper, we consider random walks in i.i.d. random environments on  $\mathbb{Z}^d$  for  $d \geq 2$ , in the specific case where the walk is directionally transient. It is expected that if the transition probabilities are uniformly elliptic then the walk is ballistic (see [79] and [94]). This conjecture has been proved under stronger transience assumptions known as Sznitman's conditions  $(T)$ ,  $(T')$  or  $(T)_\gamma$  (see [77] and [78]) and more recently condition  $(P)_M$  (see [16]). All those transience conditions are believed to be equivalent under uniform ellipticity (see [79] and [94]). Proving this equivalence is one of the major open problems in random walk in random environments (RWRE). We will give more details on these results in Section 1.2.

If we remove the uniform ellipticity assumption, the walk may become sub-ballistic even in the elliptic setting (see [67], [63], [64] and [18]). This naturally raises the following question : which ellipticity conditions characterize a ballistic behavior ?

Recently, new ellipticity criteria for ballistic behavior have been proved (in [19] and [17]). In this paper, we find a criterion (see Theorem 3.5) for positive speed which extends previously known results. We believe that this criterion is close to optimal and we use it to exhibit new examples of ballistic random walks (see Proposition 4.4). We also prove, under stronger assumptions, annealed and quenched central limit theorems (see Theorem 3.7). Furthermore, we show that if the annealed expected exit time of a unit hypercube is infinite then the walk has zero asymptotic velocity (see Theorem 3.1). We think that this criterion actually characterizes the zero-speed regime.

### 1.1 Definition of the model

Let us now define the model more precisely. Call  $U$  the set of  $2d$  canonical unit vectors and let  $\mathcal{P} := \{p(e) : p(e) \geq 0, \sum_{e \in U} p(e) = 1\}$ . We enumerate  $U$  in the following manner : denote  $\nu := \{e_1, \dots, e_d\}$  an orthonormal basis of  $\mathbb{Z}^d$  such that  $e_1 \cdot \ell \geq e_2 \cdot \ell \geq \dots \geq e_d \cdot \ell \geq 0$  and set  $e_{i+d} = -e_i$  for  $i \in [1, d]$ . In particular, we can see that

$$e_1 \cdot \ell \geq \frac{1}{\sqrt{d}}. \quad (1.1)$$

An environment  $\omega$  is an element of  $\Omega := \mathcal{P}^{\mathbb{Z}^d}$ , which we view as a collection of transition probabilities  $p^\omega(x, \cdot) := (p^\omega(x, e))_{e \in U}$  assigned to every vertex  $x \in \mathbb{Z}^d$ .

The random walk in the environment  $\omega$  started from  $x$  is the Markov chain  $(X_n)_{n \geq 0}$  in  $\mathbb{Z}^d$  with the law  $P_x^\omega$  defined by  $P_x^\omega[X_0 = x] = 1$  and

$$P_x^\omega[X_{n+1} = x + e \mid X_n = x] = p^\omega(x, e),$$

for any  $x \in \mathbb{Z}^d$  and  $e \in U$ . The law  $P_x^\omega$  is commonly referred to as the *quenched law*.

Let us consider  $\mathbf{P}$  a probability measure on the environment space  $\Omega$  which is a product measure, meaning that all random variables  $p^\omega(x, \cdot)$  for  $x \in \mathbb{Z}^d$  are i.i.d. under  $\mathbf{P}$ . This allows us to define the averaged or *annealed law* of the RWRE started at  $x$  by defining  $\mathbb{P}_x = \int P_x^\omega d\mathbf{P}$ . In the case where  $x = 0$ , we will abbreviate  $P_x^\omega$  and  $\mathbb{P}_x$  by  $P^\omega$  and  $\mathbb{P}$  respectively.

We say that the environment is elliptic if it verifies the following hypothesis (E)

$$\text{for any } x \in \mathbb{Z}^d \text{ and } e \in U \text{ we have } p^\omega(x, e) > 0, \quad \omega\text{-}\mathbf{P}\text{-a.s.} \quad (1.2)$$

and we call an environment uniformly elliptic if there exists  $\kappa > 0$  such that

$$\text{for any } x \in \mathbb{Z}^d \text{ and } e \in U \text{ we have } p^\omega(x, e) > \kappa, \quad \omega\text{-}\mathbf{P}\text{-a.s.}, \quad (1.3)$$

a condition commonly denoted (UE).

Given  $\ell \in S^{d-1}$ , we say that a RWRE is transient in the direction  $\ell$  if  $\mathbb{P}[A_\ell] = 1$  where  $A_\ell := \{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \cdot \ell = \infty\}$ .

We say that a RWRE is ballistic in the direction  $\ell$  if

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n \cdot \ell}{n} > 0, \quad \mathbb{P} - \text{a.s.}$$

## 1.2 Former results and open questions

The case of RWRE on  $\mathbb{Z}$  is well understood. In [75], the author identifies conditions that characterize recurrence versus (directional) transience, as well as zero-speed versus positive speed regimes. In particular, a regime of directional transience with zero-speed is exhibited. The existence of this regime is due to the existence of traps slowing down the walk down (see [35] for details on trapping in RWREs on  $\mathbb{Z}$ ). These traps can be formed even when transition probabilities are uniformly elliptic.

In  $\mathbb{Z}^d$ , for  $d \geq 2$ , it is more difficult to create traps. Actually, one of the main open problems concerning random walks in random environments is the following conjecture (see [79] and [94]).

**Conjecture 1.1.** *For any  $\ell \in S^{d-1}$ , we consider a random walk in a uniformly elliptic i.i.d. environment in  $\mathbb{Z}^d$  for  $d \geq 2$ . If it is transient in the direction  $\ell$ , then it is ballistic in the direction  $\ell$ .*

Let us discuss this conjecture on a very basic level. We can notice that there are two main hypotheses in this conjecture.

1. The directional transience, which is a “global” hypothesis on the transition probabilities. It gives information on how the walk explores the space.
2. The uniform ellipticity, which is a “local” property for the transition probabilities. It provides us with a sufficient condition to avoid that the walk gets trapped in a small part of the environment.

### CHAPITRE 3. LOCAL TRAPPING, WITH A. FRIBERGH

---

The main difficulty in proving Conjecture 1.1 is to understand how the walk explores the space. Roughly speaking, we need to show that directional transience implies that the walk goes relatively directly in the direction  $\ell$ , i.e. without zig-zagging on large scales. This, coupled with the fact that the walk cannot be trapped locally (because of uniform ellipticity) should imply that the walk is ballistic.

Surprisingly, it turns out to be technically difficult to show that a directional transient walk goes fairly directly in the direction  $\ell$ . Conjecture 1.1 has only been proved under stronger transience assumptions, under which we are given quantitative estimates on the exit probabilities of large slabs. Let us now introduce one of these conditions known as Sznitman's  $(T)_\gamma^\ell$  (see [77]).

For any set of vertices  $A \subset \mathbb{Z}^d$ , we introduce the exit time of the set  $A$  as

$$T_A^{\text{ex}} = \inf\{n \geq 0; X_n \notin A\}.$$

For any  $\ell \in S^{d-1}$  and for any  $b > 0$ , we define the slab

$$U_b^\ell(L) := \{x \in \mathbb{Z}^d, -bL \leq x \cdot \ell \leq L\}.$$

Set  $\ell \in S^{d-1}$  and  $\gamma \in (0, 1)$ , we say that the walk verifies the condition  $(T)_\gamma^\ell$  if there exists a neighborhood  $V \subset S^{d-1}$  of  $\ell$  such that for all  $\ell' \in V$ , we have

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^\gamma} \ln \mathbb{P}[X_{T_{U_b^{\ell'}(L)}^{\text{ex}}} \cdot \ell' < 0] < 0. \quad (1.4)$$

Loosely speaking, this means that the probability of exiting a large slab against the asymptotic direction of the walk decays like a stretched exponential of exponent  $\gamma$  (in the size of the slab).

Condition  $(T)^\ell$  corresponds to condition  $(T)_\gamma^\ell$  in the case where  $\gamma = 1$ . Condition  $(T')^\ell$  is defined as the fulfillment of condition  $(T)_\gamma^\ell$  for all  $\gamma \in (0, 1)$ . It was proved in [78] that a random walk in i.i.d. uniformly elliptic environment satisfying  $(T')^\ell$  is ballistic in the direction  $\ell$ . It was also shown (see [78]) that if  $\gamma \in (1/2, 1)$  then  $(T)_\gamma^\ell$  implies  $(T')$ .

Subsequent works ([26],[27] and [16]) have weakened the transience conditions that we can verify to prove ballistic behavior under uniform ellipticity. At this point in time, the state of the art is a result from [16] called polynomial condition typically denoted  $(P)_M$ .

To define this condition, let us consider for each  $L, L', \tilde{L} > 0$  and  $\ell \in S^{d-1}$  the box

$$B_{L,L',\tilde{L}}^\ell := R\left((-L', L) \times (-\tilde{L}, \tilde{L})^{d-1}\right) \cap \mathbb{Z}^d,$$

where  $R$  is the rotation of  $\mathbb{R}^d$  with center 0 which sends  $e_1$  onto  $\ell$ . For  $M \geq 1$  and  $\ell \in S^{d-1}$ , we say that the walk verifies condition  $(P)_M^\ell$  if for all  $L \geq \frac{2}{3}3^{29d}$ , there exist  $L' \leq \frac{5}{4}L$  and  $\tilde{L} \leq 72L^3$  such that

$$\mathbb{P}[X_{T_{B_{L,L',\tilde{L}}^\ell}^{\text{ex}}} \cdot \ell < L] \leq \frac{1}{L^M}. \quad (1.5)$$



This condition can be verified in a finite box, that is why it is referred to as an effective criterion. It should be noted that this condition obviously follows from tail estimates on the exit probabilities appearing in (1.4).

The main result of [16] is that for a RWRE in i.i.d. environment with uniformly elliptic transition probabilities then  $(P)_M$  for  $M \geq 15d + 5$  implies  $(T')$ . In particular, this implies ballisticity.

As we can see there has been a great deal of effort to understand under which transience assumptions we are able to prove ballistic behavior. But it is only recently that there have been developments on RWREs that are not uniformly elliptic.

It is known ([67], [63], [64] and [18]) that, in dimension  $d \geq 2$ , there exist elliptic random walks which are directionally transient but are not ballistic. More recently it has been shown, in [19], that under certain ellipticity conditions the polynomial condition  $(P)_M$  is equivalent to  $(T)'$ . To be more specific, consider a RWRE in an elliptic i.i.d. environment, we say that it verifies condition  $(E)_0$  if

$$\text{for all } e \in U \text{ there exists } \eta_e > 0 \text{ such that } \mathbf{E}[(p^\omega(0, e))^{-\eta_e}] < \infty. \quad (1.6)$$

One of the main results (Theorem 1.1) of [19] is that if a random walk in an elliptic i.i.d. environment verifies  $(P)_M^\ell$  for some  $M \geq 15d + 5$  and  $(E)_0$  then this RWRE verifies  $(T')^\ell$ . We give an exact statement of this result in Theorem 5.4. Furthermore, the authors of [19] introduce sufficient ellipticity conditions for ballistic behavior under condition  $(P)_M$ . Later on, the ellipticity conditions for ballistic behavior were improved in [17], providing an optimal criterion for the case of Dirichlet environments. See Section 4.2 for details on this ellipticity condition.

In order to understand which ellipticity criteria characterize ballistic behavior we need to understand exactly how local traps are created. This is the main focus of this paper. After investigating how traps are created, it is our belief that a walk is ballistic if, and only if, the expected annealed exit time of a unit hypercube is finite. In order to back up our belief we prove the following :

1. if the annealed exit time of a unit hypercube is infinite then the walk has zero asymptotic velocity (see Theorem 3.1),
2. we give a criterion for positive speed (see Theorem 3.5). In order to verify this criterion it is sufficient to prove that we can exit some particular unit hypercube containing the origin. As we explain in Section 4.1, we believe that this criterion essentially means that the exit time of a unit hypercube has finite annealed expectation.

For the aforementioned reasons, we believe that our positive speed criterion is near optimal.

One of the contribution of this work is to bring forth the idea that the smallest possible traps are contained in unit hypercubes. This is striking since, in the reversible context, it is known (see [39]) that if a walk is sub-ballistic then it can get trapped on

just one edge. In Proposition 4.5, we provide an example of a sub-ballistic RWRE than cannot stay long on only one edge.

### 1.3 Plan of the article

Let us present how this paper is structured.

In the next section (Section 2), we will start by introducing some basic notations as well as facts about regeneration times. This is a central tool for determining whether or not a walk is ballistic.

After that, in Section 3, we will present our zero speed criterion (see Theorem 3.1) and our positive speed criterion (see Theorem 3.5). We also state annealed and quenched central limit theorems (see Theorem 3.7).

Before moving on to proofs, we discuss the intuition behind our main results in Section 4. In this section we try to justify why our criterion is close to optimal. We also provide a new example of ballistic walks (see Proposition 4.4) and a zero-speed random walk that can never stay long on only one edge (see Proposition 4.5).

The proof for the sufficient condition for positive speed is presented in Section 5. This section is divided into three parts. The first one is Section 5.1 in which we prove the key estimate Proposition 5.2 : under our ballisticsity criterion the quenched probability of reaching a point far away is lower bounded. The second section is Section 5.2, in which we recall some classical results from RWREs. Finally the third part is Section 5.3, in which we finish the proof by providing an upper bound on the tail of the first regeneration time.

Finally we present the proof of the sufficient condition for zero speed in Section 6. This section is essentially independent of the rest of the paper.

Before moving on to the rest of the paper, let us specify that in the course of our proofs,  $c$  and  $C$  will typically denote constants in  $(0, \infty)$  whose value may change from line to line.

## 2 Basic notations and regeneration times

In this section, we introduce some basic notations and we summarize the facts we need about regeneration times.

Given a set  $V$  of vertices of  $\mathbb{Z}^d$ , we denote by  $|V|$  its cardinality, by  $E(V) = \{[x, y] \in E(\mathbb{Z}^d); x, y \in V\}$  its edges and

$$\partial V = \{x \notin V : \exists y \in V, x \sim y\},$$

its border. For  $A \subset \mathbb{Z}^d$  and  $x \in A$ , we denote

$$\partial_x A = \{y \in \partial A : x \sim y\},$$

the neighbors of  $x$  which are outside of  $A$ .

For any  $r > 0$ , we denote

$$\mathcal{H}^+(r) = \{z \in \mathbb{Z}^d, z \cdot \ell > r\}. \quad (2.1)$$

For any set of vertices  $A \subset \mathbb{Z}^d$ , we introduce the hitting times

$$T_A = \inf\{n \geq 0; X_n \in A\}, \quad T_A^+ = \inf\{n \geq 1; X_n \in A\}.$$

We will use a slight abuse of notation and write  $x$  instead of  $\{x\}$  when the set is a point  $x$ .

## 2.1 Regeneration times

We set  $a \in (2\sqrt{d}, 10\sqrt{d})$  and define

$$D = \inf\{n \geq 0 : X_n \cdot \vec{\ell} < X_0 \cdot \vec{\ell}\},$$

as well as the stopping times  $S_k$ ,  $k \geq 0$ ,  $R_k$ ,  $k \geq 1$ , and the levels  $M_k$ ,  $k \geq 0$  :

$$\begin{aligned} S_0 &= 0, \quad M_0 = X_0 \cdot \vec{\ell}, \quad \text{and for } k \geq 0, \\ S_{k+1} &= T_{\mathcal{H}^+(M_k+a)} \leq \infty, \quad R_{k+1} = D \circ \theta_{S_{k+1}} + S_{k+1} \leq \infty, \\ M_{k+1} &= \sup_{n \leq R_{k+1}} X_n \cdot \vec{\ell} \leq \infty, \end{aligned}$$

where  $\theta$  is the shift operator.

Finally, we define the basic regeneration time

$$\tau_1 = S_K, \quad \text{with } K = \inf\{k \geq 1 : S_k < \infty \text{ and } R_k = \infty\}.$$

**Remark 2.1.** *The choice of  $a \in (2\sqrt{d}, 10\sqrt{d})$  is only necessary to prove the non degeneracy of the covariance matrix in Theorem 2.4.*

It follows from directional transience (see for example [80]) that

$$\mathbb{P}[D = \infty] > 0, \quad (2.2)$$

this allows us to define

$$\mathbb{P}[\cdot \mid 0 - \text{regen}] := \mathbb{P}[\cdot \mid D = \infty]. \quad (2.3)$$

Then let us define the sequence  $\tau_0 = 0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < \dots$  (these inequalities hold except if the regeneration times are infinite), via the following procedure :

$$\tau_{k+1} = \tau_1 + \tau_k(X_{\tau_1+} - X_{\tau_1}, \omega(\cdot + X_{\tau_1})), \quad k \geq 0. \quad (2.4)$$

That is, the  $(k+1)$ -th regeneration time is the  $k$ -th such time after the first one.

The first main result is that the regeneration structure exists and is finite (see for example [80]).

## CHAPITRE 3. LOCAL TRAPPING, WITH A. FRIBERGH

---

**Lemma 2.2.** *Let us consider a RWRE in an elliptic i.i.d. environment. Fix  $\ell \in S^{d-1}$  and assume that the random walk is transient in the direction  $\ell$ . For any  $k \geq 1$ , we have  $\mathbb{P}$ -a.s., for all  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,*

$$\tau_k < \infty, \quad P_x^\omega\text{-a.s.}$$

The fundamental renewal property is now stated (see for example [80])

**Theorem 2.3.** *Let us consider a RWRE in an elliptic i.i.d. environment. Fix  $\ell \in S^{d-1}$  and assume that the random walk is transient in the direction  $\ell$ .*

*Under  $\mathbb{P}$ , the processes  $(X_{\tau_1 \wedge \cdot}), (X_{(\tau_1 + \cdot) \wedge \tau_2} - X_{\tau_1}), \dots, (X_{(\tau_k + \cdot) \wedge \tau_{k+1}} - X_{\tau_k}), \dots$  are independent and, except for the first one, are distributed as  $(X_{\tau_1 \wedge \cdot})$  under  $\mathbb{P}[\cdot \mid 0\text{-regen}]$ .*

The previous results we mention imply the following Theorem (see [80], [76] and [95]).

**Theorem 2.4.** *Let us consider a RWRE in an elliptic i.i.d. environment. Fix  $\ell \in S^{d-1}$  and assume that the random walk is transient in the direction  $\ell$ . Then there exists a limiting deterministic velocity*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = v, \quad \mathbb{P}\text{-a.s.},$$

where

$$v = \frac{\mathbb{E}[X_{\tau_1} \mid 0\text{-regen}]}{\mathbb{E}[\tau_1 \mid 0\text{-regen}]},$$

even in the case where  $\mathbb{E}[\tau_1 \mid 0\text{-regen}] = \infty$ . In particular one can obtain that

$$\text{if } \mathbb{E}[\tau_1 \mid 0\text{-regen}] < \infty \text{ then } v > 0.$$

Furthermore, if  $\mathbb{E}[\tau_1^2 \mid 0\text{-regen}] < \infty$ , then

$$\varepsilon^{1/2} (X_{\lfloor \varepsilon^{-1} n \rfloor} - \lfloor \varepsilon^{-1} n \rfloor v),$$

converges in law under  $\mathbb{P}$  to a brownian motion with a non-degenerate covariance matrix.

## 3 Results

### 3.1 A criterion for zero-speed

We call unit hypercube located at  $x$  the set

$$\mathfrak{H}_x := \left\{ x + \sum_{i=1}^d \varepsilon_i e_i, \text{ where } \varepsilon_i \in \{0, 1\} \text{ for all } i \in [1, d] \right\}. \quad (3.1)$$

For simplicity we use  $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$ . Let us denote  $(H)_\alpha$  the following hypothesis

$$\max_{x \in \mathfrak{H}} \mathbb{E}_x \left[ \left( T_{\mathfrak{H}}^{\text{ex}} \right)^\alpha \right] = \infty. \quad (3.2)$$

In the next theorem we exhibit a criterion for zero-speed. We believe that criterion to be sharp.

**Theorem 3.1.** *Let us consider a RWRE in an elliptic i.i.d. environment. Fix  $\ell \in S^{d-1}$  and assume that the random walk is transient in the direction  $\ell$ .*

*If  $(H)_1$  is verified, then the walk has zero speed, i.e.  $v = \vec{0}$ .*

In the same way that we prove Theorem 3.1 (see (6.3)), we can obtain lower bound estimates on regeneration times (see Section 2.1 for a precise definition of regeneration times).

**Remark 3.2.** *Let us consider a RWRE in an elliptic i.i.d. environment. Fix  $\ell \in S^{d-1}$  and assume that the random walk is transient in the direction  $\ell$ . Furthermore, we assume that there exists  $\alpha > 0$  such that we have  $(H)_\alpha$ . Then*

$$\mathbb{E}[\tau_1^\alpha \mid 0 - \text{regen}] = \infty.$$

### 3.2 A positive speed criterion

Let  $H$  be a unit hypercube of  $\mathbb{Z}^d$  and  $y \in H$ . We denote

$$Q_y^H = \max_{z \in \partial_y H} p^\omega(y, z - y), \quad (3.3)$$

the highest probability leading out of  $H$  from  $y$ .

Let  $H$  be a unit hypercube of  $\mathbb{Z}^d$  and  $x \in H$ . We denote for any  $y \in H$

$$\tilde{Q}_{x,y}^H = P_x^\omega[T_{\partial H} < T_x^+, X_{T_{\partial H}} \in \partial_y H] \quad (3.4)$$

the probability starting from  $x$  to exit  $H$  via a neighbor of  $y$  before returning to  $x$ .

In order to state our main result (Theorem 3.5), which is our criterion for positive speed, we need to introduce the concept of Markovian hypercube which we define in the next section.

#### Markovian hypercube

We denote  $\overline{\mathfrak{H}}_0 := \{\mathfrak{H}_x, \text{ where } x \in \mathbb{Z}^d \text{ and } 0 \in \mathfrak{H}_x\}$ , the sets of unit hypercubes containing 0.

Let us introduce the notion of hypercube discovered in a Markovian fashion. It is a function  $h$  from  $\Omega$  into  $\overline{\mathfrak{H}}_0$  constructed in a particular manner that we are going to describe below.

### CHAPITRE 3. LOCAL TRAPPING, WITH A. FRIBERGH

---

We will start by introducing some notations before explaining intuitively the construction of a Markovian hypercube. We construct recursively functions  $f_1, \dots, f_{2^d}$  from  $\Omega$  into  $\mathbb{Z}^d$ , such that

1.  $f_0(\omega) := 0$   $\mathbf{P}$ -a.s.,
2. for  $i \geq 0$ , the function  $f_{i+1}$  is measurable with respect to  $\{p^\omega(x, \cdot), x \in \{f_0(\omega), \dots, f_i(\omega)\}\}$ ,
3. for any  $i \geq 0$ ,  $f_{i+1}(\omega) \in \partial\{f_0(\omega), \dots, f_i(\omega)\}$ ,
4. for any  $i \geq 0$ ,  $\mathbf{P}$ -a.s. there exists  $H(\omega) \in \bar{\mathfrak{H}}_0$  such that we have  $\{f_0(\omega), \dots, f_i(\omega)\} \subset H(\omega)$ .

In words, this means we start from 0 then, using the information given by the transition probabilities at 0, we choose to add a site called  $f_1(\omega)$ . Then we use the information given by the transition probabilities at 0 and  $f_1(\omega)$  to add a new adjacent site called  $f_2(\omega)$ . We continue this procedure recursively, with the only restriction that we can never add a point  $f_{i+1}(\omega)$  such that the points  $\{f_0(\omega), \dots, f_{i+1}(\omega)\}$  would not be included in a unit hypercube.

This procedure yields a hypercube  $\{f_0(\omega), \dots, f_{2^d}(\omega)\}$  containing 0. A hypercube constructed in this way is said to be discovered in a Markovian fashion. Given such a hypercube  $h(\omega)$ , we denote  $x_0(\omega)$  the only point in  $\mathbb{Z}^d$  such that

$$\{x_0(\omega) + y \text{ with } y \in \mathfrak{H}\} = h(\omega). \quad (3.5)$$

A couple of functions  $(h(\omega), (\alpha_x(\omega))_{x \in \mathfrak{H}})$  is called a marked Markovian hypercube if

1.  $h(\omega)$  is a hypercube discovered in a Markovian fashion,
2. for any  $x \in \mathfrak{H}$ , the function  $\alpha_x(\omega)$  goes from  $\Omega$  into  $\mathbb{R}^+$ ,
3. for any  $x \in \mathfrak{H}$ , the function  $\alpha_x(\omega)$  is measurable with respect to  $\{p^\omega(y, \cdot), y \in h(\omega)\}$ .

In a marked Markovian hypercube, we simply add, using the information given by the transition probabilities in  $h(\omega)$ , certain marks in  $\mathbb{R}^+$  to every corner of the hypercube  $h(\omega)$ . We can see this by associating the mark  $\alpha_x(\omega)$  to the corner  $x_0(\omega) + x \in h(\omega)$  for every  $x \in \mathfrak{H}$ .

**Remark 3.3.** *It can easily be seen from the definition that a marked Markovian hypercube  $(h(\omega), (\alpha_x(\omega))_{x \in \mathfrak{H}})$  is measurable with respect to  $\{p^\omega(y, \cdot), y \in h(\omega)\}$ . This means that a marked Markovian hypercube can be determined independently of the information outside of that hypercube.*

#### Criterion $(K)_\alpha$

Recalling the definitions at (3.3) and (3.4),

**Définition 3.4.** *We denote  $(K)_\alpha$  the following hypothesis :*

1. there exists  $\gamma_x \in \mathbb{R}^+$ , for every  $x \in \mathfrak{H}$ , such that we have

$$\mathbf{E} \left[ \left( Q_x^{\mathfrak{H}} \right)^{-\gamma_x} \right] < \infty \quad \text{for all } x \in \mathfrak{H},$$

2. there exists a marked Markovian hypercube  $(h(\omega), (\alpha_x(\omega))_{x \in \mathfrak{H}})$  such that

$$\mathbf{E} \left[ \prod_{x \in \mathfrak{H}} \left( \tilde{Q}_{0, x_0(\omega)+x}^{h(\omega)} \right)^{-\alpha_x(\omega)} \right] < \infty,$$

3. there exists  $\varepsilon > 0$  such that

$$\sum_{x \in \mathfrak{H}} (\gamma_x \wedge \alpha_x(\omega)) \geq \alpha + \varepsilon \quad \mathbf{P}\text{-a.s.}$$

This condition may seem very complicated. This is why, in Section 4, we shall dedicate a few pages to explaining the meaning of this condition and how to apply it. In particular, we will justify why the conditions involving the exponents  $\gamma_i$  are verified in the positive speed regime under some regularity properties of the tails at 0 of  $Q_x^{\mathfrak{H}}$  for  $x \in \mathfrak{H}$  (see Lemma 4.1 and below).

### Criterion for positive speed

The next result proves that, under sufficiently strong transience conditions, the condition  $(K)_1$  (see Definition 3.4) and  $(E)_0$  (defined at (1.6)) imply positive speed.

**Theorem 3.5.** *Let us consider a RWRE in an elliptic i.i.d. environment that verifies conditions  $(E)_0$  and  $(P)_M^\ell$  for some  $M \geq 15d+5$  and  $\ell \in S^{d-1}$ . If furthermore condition  $(K)_1$  is verified, then the walk is ballistic in the direction  $\ell$ , i.e.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = v \text{ where } v \cdot \ell > 0.$$

In the course of the proof of Theorem 3.5, we obtain tail estimates on  $\tau_1$ , see Proposition 5.1.

In the next remark, we give a simple sufficient condition for  $(K)_1$  to be verified. Although this criterion is noticeably weaker than  $(K)_1$ , it already allows us to exhibit new examples of ballistic walks.

**Remark 3.6.** *It is easily seen that if  $\min_{x \in \mathfrak{H}} \mathbf{E} \left[ \left( Q_x^{\mathfrak{H}} \right)^{-(1+\varepsilon)} \right] < \infty$  for some  $\varepsilon > 0$ , then  $(K)_1$  is verified.*

*If furthermore the RWRE is in an elliptic i.i.d. environment that verifies conditions  $(E)_0$  and  $(P)_M^\ell$  for some  $M \geq 15d+5$  and  $\ell \in S^{d-1}$ , then the walk is ballistic in the direction  $\ell$ .*

### Central limit theorems

Under some stronger assumptions, we prove an annealed central limit theorem, using Theorem 2.4, and a quenched central limit theorem, using the main result of Rassoul-Agha and Seppäläinen [62].

**Theorem 3.7.** *Consider a RWRE in  $\mathbb{Z}^d$  with  $d \geq 2$ . Let  $\ell \in S^{d-1}$  and  $M \geq 15d + 5$ . Assume that the random walk satisfies conditions  $(P)_M^\ell$  and  $(E)_0$ .*

1. *If  $(K)_2$  is satisfied, then we get an annealed central limit theorem, i.e.*

$$\varepsilon^{1/2} \left( X_{\lfloor \varepsilon^{-1}n \rfloor} - \lfloor \varepsilon^{-1}n \rfloor v \right)$$

*converges in law under  $\mathbb{P}_0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$  to a Brownian Motion with non-degenerate covariance matrix.*

2. *If  $(K)_{176d}$  is satisfied, then we get a quenched central limit theorem, i.e.*

$$\varepsilon^{1/2} \left( X_{\lfloor \varepsilon^{-1}n \rfloor} - \lfloor \varepsilon^{-1}n \rfloor v \right)$$

*converges in law under  $P_0^\omega$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$  to a Brownian Motion with non-degenerate covariance matrix.*

## 4 Discussion on the main results

Let us now address some questions the reader might have about hypothesis  $(K)_1$ .

1. What does this condition intuitively mean and why?
2. How do we apply our criterion? Why is this criterion general?
3. Why do unit hypercubes appear?

Through the course of these explanations we hope to convince the reader that the hypothesis  $(K)_1$  is a near optimal criterion for positive speed.

### 4.1 What does this condition intuitively mean and why?

We believe that  $(K)_1$  essentially means that the expected annealed exit time of a hypercube has a moment of order  $1 + \varepsilon$  for some  $\varepsilon > 0$ . This would mean that  $(K)_1$  and  $(H)_1$  cover most cases of RWREs and allow us to determine whether or not the walk has positive speed under the hypotheses  $(E)_0$  and  $(P)_M^\ell$ .

Let us now explain why  $(K)_1$  and  $(H)_1$  are close to complementary. The complementary condition  $(H)_1^c$  exactly means that

$$\mathbb{E}_x(T_{\mathfrak{H}}^{\text{ex}}) < \infty, \text{ for all } x \in \mathfrak{H}. \quad (4.1)$$



### Why part (1) of $(K)_1$ is typically verified in the positive speed regime

Recall that  $\bar{\mathfrak{H}}_0$  is the set of all the hypercubes containing 0.

**Lemma 4.1.** *If  $(H)_1^c$  holds, then for any hypercube  $H \in \bar{\mathfrak{H}}_0$ , we have*

$$\mathbf{E} \left( \min_{y \in H} (Q_y^H)^{-1} \right) < \infty.$$

The proof of this lemma is straightforward, it follows from the fact that, on any point  $y \in H$ , the exit probability of  $H$  is at most  $\max_{y \in H} Q_y^H$ .

For part (1) of  $(K)_1$ , we require that there exist  $\varepsilon > 0$  and  $\gamma_y \geq 0$  for all  $y \in H$  such that

$$\text{for all } y \in H, \text{ we have } \mathbf{E}[(Q_y^H)^{-\gamma_y}] < \infty,$$

or, equivalently by the independence of  $Q_y^H$  for  $y \in H$ ,

$$\mathbf{E} \left[ \prod_{y \in H} (Q_y^H)^{-\gamma_y} \right] < \infty, \tag{4.2}$$

with  $\sum_{y \in H} \gamma_y \geq 1 + \varepsilon$ .

In the case where the tails of all  $Q_y^H$  for  $y \in H$  are sufficiently regular, e.g. polynomial, one can see that this condition is exactly equivalent to  $\mathbf{E} \left[ \min_{y \in H} (Q_y^H)^{-(1+\varepsilon)} \right] < \infty$ . This is very similar to the condition in Lemma 4.1, although slightly stronger because of the  $\varepsilon$ .

Besides, note that it is easy to see that (4.2) implies that the condition in Lemma 4.1 is verified, indeed :

$$\prod_{x \in H} (Q_x^H)^{-\gamma_x} \geq \prod_{x \in H} \left( \min_{y \in H} \frac{1}{Q_y^H} \right)^{\gamma_x} \geq \min_{y \in H} \frac{1}{Q_y^H},$$

where we used that for any  $x \in H$  we have  $\min_{y \in H} \frac{1}{Q_y^H} \leq \frac{1}{Q_x^H}$ .

Recalling Theorem 3.1, we know that  $(H)_1^c$  holds whenever the speed is positive, we hope to have convinced the reader that part (1) of  $(K)_1$  is typically verified in the positive speed regime.

### How does part (2) of $(K)_1$ relate to the exit time of hypercubes

Let us now explain why  $(K)_1$  and  $(H)_1$  are close to complementary.

The following proposition states a condition which is equivalent to  $(H)_1^c$ .

### CHAPITRE 3. LOCAL TRAPPING, WITH A. FRIBERGH

---

**Proposition 4.2.** *The condition  $(H)_1^c$  holds if, and only if, for any hypercube  $H \in \overline{\mathfrak{H}}_0$ , we have*

$$\mathbf{E} \left( \min_{y \in H} \left( \tilde{Q}_{0,y}^H \right)^{-1} \right) < \infty.$$

*Démonstration.* It will be sufficient to show that

$$\mathbf{E} \left( \min_{y \in \mathfrak{H}} \left( \tilde{Q}_{x,y}^{\mathfrak{H}} \right)^{-1} \right) < \infty, \text{ for all } x \in \mathfrak{H}, \quad (4.3)$$

which, by translation invariance of the environment, can be equivalently stated in the following way : for any hypercube  $H$  containing 0, we have

$$\mathbf{E} \left( \min_{y \in H} \left( \tilde{Q}_{0,y}^H \right)^{-1} \right) < \infty.$$

For all  $x \in \mathfrak{H}$ , we define the number of visits to  $x$  before exiting  $\mathfrak{H}$  by

$$N(x) := \sum_{n=0}^{T_{\mathfrak{H}}^{\text{ex}}} \mathbb{1}_{X_n = x},$$

and notice that

$$T_{\mathfrak{H}}^{\text{ex}} = \sum_{x \in \mathfrak{H}} N(x).$$

Define also, for any  $x \in \mathfrak{H}$ ,

$$\tilde{Q}_x^{\mathfrak{H}} := \sum_{y \in \mathfrak{H}} \tilde{Q}_{x,y}^{\mathfrak{H}},$$

which verifies that for any  $y \in \mathfrak{H}$

$$\tilde{Q}_{x,y}^{\mathfrak{H}} \leq \tilde{Q}_x^{\mathfrak{H}} \leq 2^d \max_{y \in \mathfrak{H}} \tilde{Q}_{x,y}^{\mathfrak{H}}. \quad (4.4)$$

Now, for any  $x \in \mathfrak{H}$  and any starting point  $x_0 \in \mathfrak{H}$  (could be the same), we get

$$\begin{aligned} E_{x_0}^{\omega} (N(x)) &= \sum_{n \geq 1} P_{x_0}^{\omega} (N(x) \geq n) \\ &= P_{x_0}^{\omega} (T_x < T_{\mathfrak{H}}^{\text{ex}}) \sum_{n \geq 0} \left( 1 - \tilde{Q}_x^{\mathfrak{H}} \right)^n \\ &= \frac{P_{x_0}^{\omega} (T_x < T_{\mathfrak{H}}^{\text{ex}})}{\tilde{Q}_x^{\mathfrak{H}}}. \end{aligned}$$

In particular, we have, for any  $x_0 \in \mathfrak{H}$ ,

$$\frac{1}{\tilde{Q}_{x_0}^{\mathfrak{H}}} \leq E_{x_0}^{\omega} (T_{\mathfrak{H}}^{\text{ex}}) \leq \sum_{y \in \mathfrak{H}} \frac{1}{\tilde{Q}_y^{\mathfrak{H}}}.$$

Thus, (4.1) holds if, and only if,

$$\mathbf{E} \left( \frac{1}{\tilde{Q}_x^{\mathfrak{H}}} \right) < \infty, \text{ for all } x \in \mathfrak{H},$$

which is also equivalent by (4.4) to (4.3).  $\square$

For technical reasons it is difficult for us to use the condition appearing in Proposition 4.2. Indeed, we want to use large deviations which requires slightly stronger assumptions. The way we strengthen the condition in Proposition 4.2 is similar to what we did in (4.2). In this new case, the random variables  $\tilde{Q}_{0,y}^H$  are correlated. For this reason, we introduce the following condition which is slightly more flexible : there exist random variables  $(\alpha_x(\omega))_{x \in H}$  such that

$$\mathbf{E} \left[ \prod_{x \in H} \left( \tilde{Q}_{0,x}^H \right)^{-\alpha_x(\omega)} \right] < \infty, \quad (4.5)$$

with  $\sum_{x \in H} \alpha_x(\omega) \geq 1$ ,  $\mathbf{P}$ -almost surely. As the reader may notice that this resembles part (2) of condition  $(K)_1$ . On the one hand, we lost a constant  $\varepsilon$ . On the other hand, we only require this condition (4.5) to be verified on a Markovian hypercube instead of all hypercubes containing 0. Only having to verify this property on a single Markovian hypercube gives us a lot of flexibility. The flip side of this flexibility is that we require a slightly stronger condition on the  $\alpha$ 's (see part (3) of  $(K)_1$ ). This will be discussed in the next section.

### Some comments on part (3) of $(K)_1$

The reader can easily realize that, because of part (3) of  $(K)_1$ , it is useless to choose  $\alpha_x(\omega) > \gamma_x$  for any  $x \in \mathfrak{H}$ .

Such a condition is obviously needed, since part (2) of  $(K)_1$  can always be verified with  $\sum_{x \in h(\omega)} \alpha_x(\omega) \geq 1 + \varepsilon$ . Indeed, using only the transition probabilities at 0, we can always construct a Markovian hypercube  $h(\omega)$  from which the walker can exit in one step with probability at least  $1/(2d)$  through an edge  $e(\omega)$ . By assigning  $\alpha_{e(\omega)}(\omega) = 2$ , we can verify part (2) of  $(K)_1$ , but part (3) is not necessarily verified.

Intuitively, part (3) of  $(K)_1$  prevents us from using too strongly the conditioning provided by  $h(\omega)$ . In particular, the tail at 0 of  $\tilde{Q}_{0,x_0(\omega)+x}^{h(\omega)}$  cannot be much lighter than the one of  $Q_x^{\mathfrak{H}}$ .

In the next section, we will explain how to choose the Markovian hypercube in order to verify  $(K)_\alpha$ .

## 4.2 How do we apply the criterion ? Why is this criterion general ?

To apply the criterion  $(K)_\alpha$ , we need to find an efficient way of choosing our Markovian hypercube  $h(\omega)$ . Generally speaking one should try to choose the Markovian hypercube  $h(\omega)$ , in such a way that we can easily move around the hypercube. This will increase the potential exit points and make it easier to verify  $(K)_\alpha$ . Surprisingly one should not choose the hypercube from which it is the easiest to exit (see Section 4.1).

The choice of  $\alpha_x(\omega)$  is supposed to reflect how easy it is to exit the hypercube  $h(\omega)$  by the corner  $x + x_0(\omega)$ . The choice of  $\alpha_x(\omega) = 0$  means that we essentially ignore the possibility of exiting the hypercube in that corner.

In order to illustrate how to apply the criterion  $(K)_\alpha$ , we are going to show that  $(K)_\alpha$  is more general than the current best criterion for positive speed (see [17]). This will be done in two parts. Firstly, we take the criterion for positive speed exhibited in [17] and show that it implies  $(K)_1$ . Secondly, we will provide an example which verifies  $(K)_1$  but no former criterion.

### Extending previous results

In [17], the authors introduced the following condition called  $(E')_1$  : there exists  $\{\phi(e), e \in U\} \in (0, \infty)^{2d}$  such that

1.  $2 \sum_{e \in U} \phi(e) - \sup_{e \in U} (\phi(e) + \phi(-e)) > 1$ ,
2. for every  $e \in U$  we have that

$$\mathbf{E} \left[ \exp \left( \sum_{e' \neq e} \phi(e') \log \frac{1}{p^\omega(0, e')} \right) \right] < \infty,$$

It is shown (see Theorem 2 in [17]) that under  $(E')_1$  the walk is ballistic provided the conditions  $(P)_M$  and  $(E)_0$  are verified.

Our goal here is to show that the ellipticity condition we present in this paper is more general than those of [19] and [17].

**Proposition 4.3.** *Any random environment verifying the condition  $(E')_1$  also verifies  $(K)_1$ .*

*Démonstration.* Assume that there exists  $\{\phi(e), e \in U\} \in (0, \infty)^{2d}$  such that  $(E')_1$  holds. Then there exists  $\varepsilon > 0$  such that

1. we have

$$2 \sum_{e \in U} \phi(e) - \sup_{e \in U} (\phi(e) + \phi(-e)) > 1 + \varepsilon, \tag{4.6}$$

2. for every  $e \in U$  we have that

$$\mathbf{E} \left[ \exp \left( \sum_{e' \neq e} \phi(e') \log \frac{1}{p^\omega(0, e')} \right) \right] < \infty, \tag{4.7}$$

Let us check that we can verify the three conditions of  $(K)_1$  (defined at Definition 3.4). This will prove our proposition.

*First condition*

The first point (1) of Definition 3.4 of  $(K)_1$  holds by choosing for any  $x \in \mathfrak{H}$

$$\gamma_x = \sum_{e \in U: x+e \in \partial_x \mathfrak{H}} \phi(e), \quad (4.8)$$

because of property (4.7).

*The definition of the Markovian hypercube and the third condition*

Now, let us construct a marked Markovian hypercube  $(h(\omega), (\alpha_x(\omega))_{x \in \mathfrak{H}})$  (see Section 3.2) fulfilling condition  $(K)_1$ .

Recall the definition of  $\{e_1, \dots, e_d\}$  at (1.1) and  $\mathfrak{H}_0$  at (3.1). Fix  $\delta \in (0, 1/(2d))$  and define the event

$$A_1 := \{p^\omega(0, e_1) \geq \delta\},$$

then recursively, for all  $k \in \{2, \dots, 2d\}$ ,

$$A_k := \{p^\omega(0, e_k) \geq \delta\} \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \right),$$

so that  $(A_k)_{1 \leq k \leq 2d}$  forms a partition of  $\Omega$ .

Now, we define a Markovian hypercube  $h(\omega)$  such that  $h(\omega) = \mathfrak{H}_0$  on  $A_k$  for all  $k \in \{1, \dots, d\}$ , and  $h(\omega) = \mathfrak{H}_{(-1, \dots, -1)}$  on  $A_k$  for all  $k \in \{1+d, \dots, 2d\}$ . Recall the definition (3.5) of  $x_0(\omega)$  and notice that either  $x_0(\omega) = 0$  or  $x_0(\omega) = (-1, \dots, -1)$ .

Let us work on the event  $A_k$ , for some  $k \in \{1, \dots, 2d\}$ . We will now label some vertices of the hypercube  $h(\omega)$ . Firstly, let  $v_0^{(k)} := 0$  be the origin. This vertex  $v_0^{(k)}$  has  $d$  neighbors in  $h(\omega)$ : let us call them  $v_1^{(k)}, \dots, v_d^{(k)}$  such that  $v_d^{(k)} := e_k$ . Notice that, on the event  $A_k$ ,  $p^\omega(v_0^{(k)}, v_d^{(k)}) = p^\omega(0, e_k) \geq \delta$ .

The vertex  $v_d^{(k)}$  has also  $d$  neighbors in  $h(\omega)$ , one of them is  $v_0^{(k)}$  and let us call  $u_1^{(k)}, \dots, u_{d-1}^{(k)}$  the other neighbors (which are separate from the  $v^{(k)}$ 's). Note that, all these vertices are not random (their definition only depends on  $k$ ).

Let us describe ways to exit the hypercube  $h(\omega)$  that will provide lower bounds on quantities of the type  $\tilde{Q}_{0, x_0(\omega)+x}^{h(\omega)}$  (see Definition 3.4). First, we have to go out of the edge  $\{v_0^{(k)}, v_d^{(k)}\} = \{0, e_k\}$  (which we can cross easily from left to right), using one of the vector that points out of this edge. There are two possibilities

1. if this vector makes us exit  $h(\omega)$ , we have reached our goal (exiting  $h(\omega)$ ),
2. if this vector leads us to another point of the hypercube, we just go on the same direction for one more step, which makes us exit the hypercube  $h(\omega)$  (see Figure 3.1).

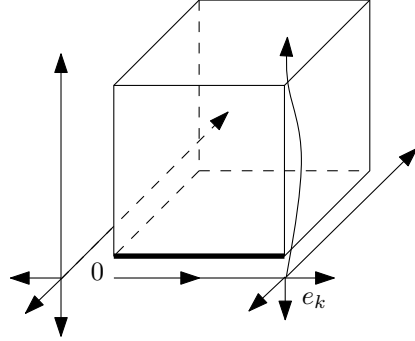


FIGURE 3.1 – Chosen ways to exit the hypercube, using  $(E')_1$ . The walker exits the hypercube following the arrows. The bold arrow is crossed with a lower bounded probability.

There are many more ways to exit the hypercube but we will not need them, indeed our lower bounds on the quantities of the type  $\tilde{Q}_{0,x_0(\omega)+x}^{h(\omega)}$  (see Definition 3.4) will be sufficient.

This intuition will guide us in our choice of  $\alpha_x$ . We labeled  $2d$  vertices of  $h(\omega)$  among  $2^d$ . For any point  $x \in h(\omega)$  such that  $x \notin \{v_0^{(k)}, \dots, v_d^{(k)}, u_1^{(k)}, \dots, u_{d-1}^{(k)}\}$ , we just choose the mark  $\alpha_{x-x_0(\omega)}(\omega) := 0$ , where  $x_0(\omega)$  is defined in Section 3.2.

Recalling the definition of  $\gamma_x$  at (4.8), let us define

$$\alpha_{v_0^{(k)}-x_0(\omega)}(\omega) := \gamma_{v_0^{(k)}-x_0(\omega)},$$

$$\alpha_{v_d^{(k)}-x_0(\omega)}(\omega) := \gamma_{v_d^{(k)}-x_0(\omega)},$$

as well as, for all  $i \in \{1, \dots, d-1\}$ ,

$$\alpha_{v_i^{(k)}-x_0(\omega)}(\omega) := \phi(v_i^{(k)} - v_0^{(k)}) < \gamma_{v_i^{(k)}-x_0(\omega)},$$

$$\alpha_{u_i^{(k)}-x_0(\omega)}(\omega) := \phi(u_i^{(k)} - v_d^{(k)}) < \gamma_{u_i^{(k)}-x_0(\omega)}.$$

Notice that, if we set  $u_0^{(k)} := v_d^{(k)} (= e_k)$ ,

$$\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_{v_i^{(k)}-x_0(\omega)}(\omega) = \sum_{e \in U} \phi(e) - \phi(e_k),$$

$$\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_{u_i^{(k)} - x_0(\omega)}(\omega) = \sum_{e \in U} \phi(e) - \phi(-e_k).$$

Hence, by (4.6), there exists  $\varepsilon > 0$  such that for any  $k \in \{1, \dots, 2d\}$ , on the event  $A_k$

$$\sum_{x \in \mathfrak{H}} (\gamma_x \wedge \alpha_x(\omega)) = 2 \sum_{e \in U} \phi(e) - (\phi(e_k) + \phi(-e_k)) \geq 1 + \varepsilon. \quad (4.9)$$

*Second condition for a Markovian hypercube*

We have described how to obtain lower bounds on  $\tilde{Q}_{0, x_0(\omega)+x}^{h(\omega)}$  for  $x \in \mathfrak{H}$  in the paragraph describing the intuition behind our choice of  $\alpha_x$ . Thus, on the event  $A_k$  for any  $k \in \{1, \dots, 2d\}$ , using that  $p^\omega(0, e_k) = p^\omega(0, v_d^{(k)} - v_0^{(k)}) \geq \delta$ , we can see that

$$\begin{aligned} \prod_{x \in \mathfrak{H}} \left( \tilde{Q}_{0, x_0(\omega)+x}^{h(\omega)} \right)^{-\alpha_x(\omega)} &\leq \left( Q_{v_0}^{h(\omega)} \right)^{-\alpha_{v_0^{(k)} - x_0(\omega)}(\omega)} \left( \delta Q_{v_d}^{h(\omega)} \right)^{-\alpha_{v_d^{(k)} - x_0(\omega)}(\omega)} \\ &\times \prod_{i=1}^{d-1} \left( p^\omega(v_0^{(k)}, v_i^{(k)} - v_0^{(k)}) p^\omega(v_i^{(k)}, v_i^{(k)} - v_0^{(k)}) \right)^{-\alpha_{v_i^{(k)} - x_0(\omega)}(\omega)} \\ &\times \prod_{i=1}^{d-1} \left( \delta p^\omega(u_0^{(k)}, u_i^{(k)} - u_0^{(k)}) p^\omega(u_i^{(k)}, u_i^{(k)} - u_0^{(k)}) \right)^{-\alpha_{u_i^{(k)} - x_0(\omega)}(\omega)} \\ &\leq \delta^{-\sum_{e \in U: e \neq -e_k} \phi(e)} \prod_{e \in U, e \neq e_k} \left( p^\omega(v_0^{(k)}, e) \right)^{-\phi(e)} \\ &\times \prod_{e \in U, e \neq -e_k} \left( p^\omega(u_0^{(k)}, e) \right)^{-\phi(e)} \\ &\times \prod_{i=1}^{d-1} \left( p^\omega(v_i^{(k)}, v_i^{(k)} - v_0^{(k)}) \right)^{-\phi(v_i^{(k)} - v_0^{(k)})} \\ &\times \prod_{i=1}^{d-1} \left( p^\omega(u_i^{(k)}, u_i^{(k)} - u_0^{(k)}) \right)^{-\phi(u_i^{(k)} - u_0^{(k)})}. \end{aligned}$$

We can notice on the right-hand side of the previous equations we have **P**-independence between the terms

1.  $\prod_{e \in U, e \neq e_k} \left( p^\omega(v_0^{(k)}, e) \right)^{-\phi(e)},$
2.  $\prod_{e \in U, e \neq -e_k} \left( p^\omega(u_0^{(k)}, e) \right)^{-\phi(e)},$
3.  $p^\omega(v_i^{(k)}, v_i^{(k)} - v_0^{(k)}),$  for all  $i \in [1, d-1],$
4.  $p^\omega(u_i^{(k)}, u_i^{(k)} - u_0^{(k)}),$  for all  $i \in [1, d-1].$

### CHAPITRE 3. LOCAL TRAPPING, WITH A. FRIBERGH

---

Hence, for any  $k \in \{1, \dots, 2d\}$ , the annealed expectation of this previous quantity is finite, by (4.7). Thus, using translation invariance, that

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( \prod_{x \in \mathfrak{H}} \left( \tilde{Q}_{0, x_0(\omega)+x}^{h(\omega)} \right)^{-\alpha_x(\omega)} \right) &= \mathbf{E} \left( \sum_{k=1}^{2d} \mathbb{1}_{A_k} \prod_{x \in \mathfrak{H}} \left( \tilde{Q}_{0, x_0(\omega)+x}^{h(\omega)} \right)^{-\alpha_x(\omega)} \right) \\ &\leq 2d \delta^{-\sum_e \phi(e)} \prod_{k=1}^{2d} \left( \mathbf{E} \left( \prod_{e \neq e_k} p^\omega(0, e)^{-\phi(e)} \right) \right)^{2d} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

This concludes the proof, together with (4.8) and (4.9) since all the three parts of the definition of  $(K)_1$  are verified.  $\square$

#### An example that verifies $(K)_1$ but no former criteria for ballistic behavior

We are now going to introduce an example in which we can verify  $(K)_1$  but not  $(E')_1$ , showing that the ellipticity criterion  $(K)_1$  is more general. This example also satisfies condition  $(E)_0$ , and we will also prove that it verifies condition  $(T)$  and thus directional transience.

Let us choose  $T$  a random variable such that  $2d + 1 \leq T < \infty$   $\mathbf{P}$ -a.s.,  $\mathbb{E}(T^{\frac{1}{4d}}) = \infty$  and  $\mathbb{E}(T^{\frac{1}{8d}}) < \infty$ . Furthermore, we introduce an independent random variable  $i_0$  that is uniform on  $\{1, \dots, 2d\}$ .

Let us now define  $p^\omega(0, \cdot)$  in terms of  $T$  and  $i_0$  as this will give us the transition probabilities for this walk. Let  $\varepsilon \in (0, 1/5)$  be small enough and set :

$$p^\omega(0, e_i) := \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{if } i = i_0, \\ \frac{1 - \varepsilon - \frac{\mathbb{1}_{1 \leq i_0 \leq d}}{T}}{d - \mathbb{1}_{1 \leq i_0 \leq d}} & \text{if } i \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i_0\}, \\ \frac{\varepsilon - \frac{\mathbb{1}_{d+1 \leq i_0 \leq 2d}}{T}}{d - \mathbb{1}_{d+1 \leq i_0 \leq 2d}} & \text{if } i \in \{d+1, \dots, 2d\} \setminus \{i_0\}. \end{cases}$$

Let us denote  $\mathbf{P}^{\text{expl}}[\cdot]$  the law of this environment.

**Proposition 4.4.** *The environment  $\mathbf{P}^{\text{expl}}[\cdot]$  verifies  $(K)_1$  but does not verify  $(E')_1$ . Furthermore a RWRE in an environment given by  $\mathbf{P}^{\text{expl}}[\cdot]$  verifies condition  $(T)$  and  $(E)_0$ .*

*Démonstration.* Note that  $\mathbb{E}(T^{\frac{1}{8d}}) < \infty$  ensures that  $(E)_0$  holds. Let us prove that the walk is directionnaly transient and verifies conditions  $(T')$ .

The transition probabilities of  $\mathbf{P}^{\text{expl}}[\cdot]$  are such that the walk has a strong drift toward  $\ell_0 := e_1 + \dots + e_d$ , as soon as  $\varepsilon$  is small enough. Indeed, we have

$$P_0^\omega(X_1 \cdot \ell_0 = 1) = 1 - P_0^\omega(X_1 \cdot \ell_0 = -1) = 1 - \varepsilon \quad \mathbf{P} - \text{a.s.}$$



Thus, the process  $(X_n \cdot \ell_0)_n$  is a random walk on  $\mathbb{Z}$  in a deterministic environment such that it performs a jump toward the right with probability  $1 - \varepsilon$ . Therefore, it is now clear that the walk  $X$  is transient towards  $\ell_0$  and

$$\frac{X_n \cdot \ell_0}{n} \longrightarrow 1 - 2\varepsilon.$$

### *Verifying condition (T)*

We want to prove condition  $(T)^{\ell_0}$  (see (1.4)), this means we need a neighborhood of  $\ell_0$ . For this we consider  $\ell'_0 = \ell_0 + \sum_{i=1}^d \varepsilon_i e_i$ , where, for all  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $\varepsilon_i \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Notice that, for all  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n \cdot \ell'_0 = X_n \cdot \ell_0 + \sum_{i=1}^d \varepsilon_i (X_n \cdot e_i)$ . Thus, obviously we have  $X_n \cdot \ell'_0 \geq X_n \cdot \ell_0 - \varepsilon n$ .

Now, using a standard large deviation type argument, we can show that for some  $\lambda > 0$  small enough, we have for all  $M > 0$

$$\mathbb{P}(X_n \cdot \ell'_0 < -M) \leq C e^{-\lambda(n+M)},$$

to prove this inequality we use the fact that  $\varepsilon < 1/5$ . Furthermore, we get :

$$\mathbb{P}_0 \left( T_{-M}^{(X_n \cdot \ell'_0)} < T_a^{(X_n \cdot \ell'_0)} \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \cdot \ell'_0 < -M) \leq C \exp(-\lambda M),$$

where for  $x \in \mathbb{Z}$  we denote  $T_x^{(X_n \cdot \ell'_0)}$  denotes the first hitting time of  $x$  by the walk  $X_n \cdot \ell'_0$ .

We can now check easily that condition (T) is verified by choosing  $a = L \geq 1$  and  $M = bL$ , for some  $b > 0$ , since

$$\mathbb{P} \left( T_{-bL}^{(X_n \cdot \ell_0)} < T_L^{(X_n \cdot \ell_0)} \right) \leq C e^{-cL}.$$

### *Verifying that condition $(E')_1$ is not satisfied*

Let us prove that the condition  $(E')_1$  is not satisfied. Indeed, for any family of real numbers  $\{\phi(e), e \in U\} \in (0, \infty)^{2d}$  such that

$$2 \sum_{e \in U} \phi(e) - \sup_{e \in U} (\phi(e) + \phi(-e)) > 1,$$

there exists  $e_0 \in U$  such that  $\phi(e_0) \geq 1/4d$ . Then, we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \exp \left( \phi(e_0) \log \frac{1}{p^\omega(0, e_0)} \right) \right] &\geq \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{i_0 = e_0} T^{\phi(e_0)} \right] \\ &\geq \frac{1}{2d} \mathbb{E} \left( T^{\frac{1}{4d}} \right) = \infty, \end{aligned}$$

in particular this implies that  $(E')_1$  is not satisfied.

*Verifying that condition  $(K)_1$  is satisfied*

On the other hand, let us prove that condition  $(K)_1$  is verified. By the definition of  $\mathbf{P}^{\text{expl}}[\cdot]$ , for any  $x \in \mathfrak{H}$ ,  $Q_x^{\mathfrak{H}} \geq \varepsilon/d$   $\mathbf{P}$ -a.s. and thus has any moments. At this point one could conclude the proof by using Remark 3.6.

For illustrative purposes, we shall also verify  $(K)_\alpha$  for any given  $\alpha > 0$ . We can choose, for all  $x \in \mathfrak{H}$ ,  $\gamma_x = \alpha + 1$  for instance in order to verify the first property of  $(K)_\alpha$ . Then, we define a Markovian hypercube such that  $h(\omega) = \mathfrak{H}$   $\mathbf{P}$ -a.s. so that it is in fact deterministic and  $x_0(\omega) = 0$   $\mathbf{P}$ -a.s. Then, we choose  $\alpha_0(\omega) = \alpha + 1$   $\mathbf{P}$ -a.s. and, for any  $x \in \mathfrak{H} \setminus \{0\}$ , we fix  $\alpha_x(\omega) = 0$   $\mathbf{P}$ -a.s. This implies that

$$\mathbf{E} \left[ \prod_{x \in \mathfrak{H}} \left( \tilde{Q}_{0, x_0(\omega)+x}^{h(\omega)} \right)^{-\alpha_x(\omega)} \right] \leq \mathbf{E} \left[ \left( Q_0^{\mathfrak{H}} \right)^{-(\alpha+1)} \right] < \infty,$$

and we conclude with

$$\sum_{x \in \mathfrak{H}} (\gamma_x \wedge \alpha_x(\omega)) = \alpha + 1.$$

This means that  $(K)_\alpha$  is verified for any  $\alpha > 0$  (with  $\varepsilon = 1$ ). □

### 4.3 Why do unit hypercubes appear ?

Let us explain informally why traps can only exist if the walk can get trapped inside a hypercube. Intuitively, if there is a finite shape  $\mathcal{S}$  in which the walk stays trapped, then every edge getting out of this edge has a abnormally small probability of being crossed (making this edge a rare one). If the “corners” of that shape were translated onto the hypercube  $\mathfrak{H}$ , we could create a trap inside  $\mathfrak{H}$  (see Figure 3.2). This trap inside  $\mathfrak{H}$  should typically be more likely to appear than the initial trap in  $\mathcal{S}$  since we have diminished the number of atypically “hard-to-cross” (thus rare) edges.

Conversely, we should also show that there are RWREs in elliptic i.i.d. environments in  $\mathbb{Z}^d$  with  $d \geq 2$  that have zero speed but cannot be trapped on only one edge.

Let us choose  $T$  a positive random variable verifying that  $\mathbf{P}[T \leq \frac{1}{2}] = 1$  and  $\mathbf{P}[T^{-1} \geq n] \geq cn^{-1/2^d}$ . Furthermore, we introduce an independent random variable  $B_0$  which is uniform on the set of orthonormal basis of  $\mathbb{Z}^d$ .

We are going to define  $p^\omega(0, \cdot)$  in terms of  $T$  and  $B_0$  as this will give us the law of the transition probabilities for our walk. We set

$$p^\omega(0, e_i) = \begin{cases} \frac{T}{d} & \text{if } e_i \in B_0, \\ \frac{1}{d} - \frac{T}{d} & \text{if } e_i \notin B_0. \end{cases} \quad (4.10)$$

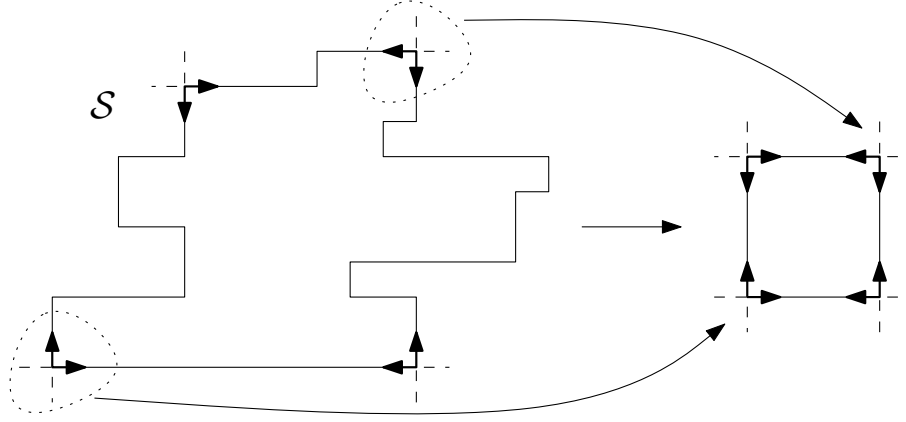


FIGURE 3.2 – The “corners” of a shape  $\mathcal{S}$  in  $\mathbb{Z}^2$  translated onto a hypercube.

In this model, we typically imagine that  $T$  is small which means that the edges in  $B_0$  are hard to cross whereas the others are not. It is obvious that the walk cannot get trapped on a single edge. Indeed, from every point there are at least  $d$  edges which have probability at least  $1/(2d)$  of being taken.

On the other hand, the exit time of a hypercube has infinite expectation. Indeed, let us introduce the random variables  $B_0^{(x)}$ , for all  $x \in \mathbb{Z}^d$ , which are distributed like  $B_0$  such that they are all independent from each other. Similarly we introduce  $T_0^{(x)}$ , for any  $x \in \mathbb{Z}^d$ .

For  $x \in \mathfrak{H}$ , let us consider the event  $\{B_0^{(x)} = \partial_x \mathfrak{H}, \text{ for all } x \in \mathfrak{H}\}$ . This event has a positive probability  $((2^{-d})^{2^d})$ . On this event, from any point  $x \in \mathfrak{H}$ , we know that  $P_x^\omega[X_1 \notin \mathfrak{H}] \leq \max_{x \in \mathfrak{H}} \frac{T_0^{(x)}}{d}$ . This implies that

$$\mathbb{E}[T_{\mathfrak{H}}^{\text{ex}}] \geq c \mathbf{E} \left[ \text{Geom} \left( \max_{x \in \mathfrak{H}} \frac{T_0^{(x)}}{d} \right) \right] = c \mathbf{E} \left[ \min_{x \in \mathfrak{H}} \frac{1}{T_0^{(x)}} \right].$$

To see that the right-hand side is infinite, we simply compute the tail of  $\min_{x \in \mathfrak{H}} T_0^{(x)}$ ,

$$\mathbf{P} \left[ \min_{x \in \mathfrak{H}} \frac{1}{T_0^{(x)}} \geq n \right] = \mathbf{P}[T^{-1} \geq n]^{2^d} \geq cn^{-1}, \quad (4.11)$$

which is non-integrable. This means that  $\mathbb{E}[T_{\mathfrak{H}}^{\text{ex}}] = \infty$ . This indicates that trapping occurs. If the walk was directionally transient, then we could use Theorem 3.1 and prove that the walk is sub-ballistic, even though one single edge is not enough to trap a walk. Nevertheless, since the transition probabilities are symmetric, the walk is not directionally transient.

In order to address this issue, let us introduce the following similar model. Recall the notation  $T$  and  $B_0$  defined above (4.10). We will now define a RWRE in  $\mathbb{Z}^{d+1}$ . For

this, let us point out that  $B_0$  is a  $d$ -dimensional basis in a  $(d+1)$ -dimensional space such that a.s.  $B_0 \cap \{e_{d+1}, e_{2(d+1)}\} = \emptyset$ . Moreover, we have that a.s.  $\{e \in U, e \in B_0 \text{ or } -e \in B_0\} = U \setminus \{e_{d+1}, e_{2(d+1)}\}$ , where  $U$  is the set of the  $2(d+1)$  unit vectors of  $\mathbb{Z}^{d+1}$ . After noticing this, we can set

$$q^\omega(0, e_i) = \begin{cases} \frac{T}{C(T,d)} & \text{if } e_i \in B_0, \\ \frac{1}{C(T,d)} - \frac{T}{C(T,d)} & \text{if } -e_i \in B_0, \\ \frac{2T}{C(T,d)} & \text{if } i = 1+d, \\ \frac{T}{C(T,d)} & \text{if } i = 2(1+d). \end{cases} \quad (4.12)$$

where  $C(T, d)$  is a normalizing constant so that  $q(0, \cdot)$  yields a probability transition. Since  $T \leq 1/2$  a.s. an elementary computation shows that  $d \leq C(T, d) \leq 2(d+1)$ .

Let us call  $\mathbf{Q}^{\text{ex}}[\cdot]$  the law of the i.i.d. environment arising from the previous construction.

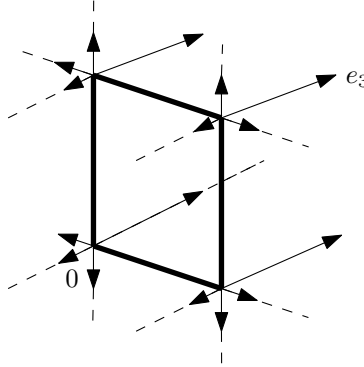


FIGURE 3.3 – Transition probability around a square  $\mathfrak{S}$  in  $\mathbb{Z}^3$  on the event  $\{B_0^{(x)} = \partial_x \mathfrak{S} \setminus \{e_3, e_6\}, \text{ for all } x \in \mathfrak{S}\}$ . Bold edges are crossed with a lower bounded probability. Direction  $e_3$  is preferred among those leading out of  $\mathfrak{S}$ .

**Proposition 4.5.** *Let  $X_n$  be the RWRE in the environment given by  $\mathbf{Q}^{\text{ex}}[\cdot]$ . For any  $d \geq 1$ , it verifies that*

1.  $X_n$  is transient in the direction  $e_{1+d}$ .
2.  $X_n$  has zero velocity.

*If furthermore  $d \geq 2$ , then the walk  $X_n$  is unlikely to localize on one edge in the sense that there exists  $C(d) < \infty$  such that*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\text{there exists } i \in [0, n], \text{ such that } |\{X_j, j \in [i, i + C(d) \ln n]\}| = 2] = 0.$$

*Démonstration.* The directional transience follows immediately from the fact that  $X_n \cdot e_{1+d}$  is a time-changed 2-biased random walk on  $\mathbb{Z}$ .

A computation similar to (4.11), proves that the annealed exit time of a hypercube is infinite. The directional transience and Theorem 3.1 imply that the asymptotic velocity is 0.

We know that from every point there are at least  $d$  edges which have probability at least  $1/(4(d+1))$  of being taken. If  $d \geq 2$ , it can then easily be show that the time spend on one edge is stochastically upper-bounded by a geometric random variable or parameter  $1/(4(d+1))$ . The final point of our proposition therefore follows from a simple union bound.  $\square$

**Remark 4.6.** *In fact, this walk also verifies condition  $(P)_M^{e_{d+1}}$  for some  $M \geq 15d + 5$ , see Theorem 4 of [17].*

## 5 Proof of Theorem 3.5 and Theorem 3.7

This section is dedicated to the proof of Theorem 3.5 and Theorem 3.7 which state respectively the positive speed and central limit theorems for transient random walks in an elliptic i.i.d. environment satisfying  $(E)_0$  (see (1.6)), the polynomial condition (see (1.5)) and the ellipticity conditions  $(K)_\alpha$ , defined by Definition 3.4.

The following proposition gives an estimate on the tail of the regeneration time  $\tau_1$ , defined in Section 2.1.

**Proposition 5.1.** *Let  $\ell \in S^{d-1}$ ,  $\alpha > 0$  and  $M \geq 15d + 5$ . Assume that  $(P)_M^\ell$  is satisfied and that the ellipticity conditions  $(E)_0$  and  $(K)_\alpha$  hold (resp. defined in (1.6) and (3.4)). Then, there exists  $\delta > 0$  such that*

$$\mathbb{P}(\tau_1 > u) \leq Cu^{-(\alpha+\delta)}.$$

On the first hand, this Proposition implies positive speed (see Theorem 3.5) by using Theorem 2.4. On the other hand, it also implies the central limit theorems (see Theorem 3.7), by using Theorem 2.4 for the annealed case and the main result of Rassoul-Agha and Seppäläinen [62] for the quenched case.

The goal is thus to prove Proposition 5.1, which is done in Section 5.3. The proof of Proposition 5.1 relies on two results of [19] which state that, under  $(E)_0$ , the polynomial condition is equivalent to condition  $(T')$  (see Theorem 5.4) and that some atypical quenched exit estimates hold (see Proposition 5.6).

Another key of the proof is that, under  $(K)_1$ , with great probability, the walker reaches some point sufficiently away with sufficiently large quenched probability. The exact meaning of this sentence will be clarified in Proposition 5.2 and Corollary 5.3 in the following Section.

These three arguments allow us to derive an estimate on the tail of the regeneration time  $\tau_1$ , using arguments similar to those used by Sznitman in [77].

### 5.1 Attainability estimates

Let us prove the following result which is needed for the proof of Theorem 3.5 and Theorem 3.7. For this purpose, let us define the  $2^d$  following paths starting at 0 and reaching a point at distance  $n$  by visiting at most  $n + 2^d$  vertices, and without coming back to 0. We are going to use the marked Markovian hypercube  $(h(\omega), (\alpha_x(\omega))_{x \in \mathfrak{H}})$  associated to condition  $(K)_\alpha$  and his particular corner  $x_0(\omega)$ , defined in (3.5).

As we will see, these *paths* are not really paths but rather unions of trajectories. Indeed, we construct these objects in two steps. The first step consists in (starting at 0 and without coming back to 0) going out of the Markovian hypercube reaching some neighbor  $y$  of the hypercube. This does not define one path but a union of paths. For the second step, we construct an actual path that starts in  $y$  and goes more or less straight away from 0, without intersecting itself (see Figure 3.4). We allow ourselves to misname these objects and call them *paths* as the important point is that they go from 0 to some point that is far away without coming back to 0. Moreover, even though we do not control the number of steps in these paths, we can upper bound the number of different points that they visit.

For any  $x \in \mathfrak{H}$  and  $n \in \mathbb{N}$ , let  $\mathcal{Y}_x^{(n)} := (y_0^{(x)}, \dots, y_n^{(x)})$  be the path constructed as follows :

1. the path starts at  $y_0^{(x)} = 0$ ;
2. the path goes out of the marked Markovian hypercube  $(h(\omega), (\alpha_z(\omega))_{z \in \mathfrak{H}})$ , without coming back to 0, and via a neighbour  $y_1^{(x)}$  of  $x_0(\omega) + x$  such that

$$P_0^\omega \left( T_{\partial h(\omega)} < T_0^+, X_{T_{\partial h(\omega)}} = y_1^{(x)} \right) = \max_{y \in \partial_{x_0(\omega)+x} h(\omega)} P_0^\omega \left( T_{\partial h(\omega)} < T_0^+, X_{T_{\partial h(\omega)}} = y \right),$$

and  $y_1^{(x)}$  is chosen arbitrarily if several vertices realize this last equality ;

3. the rest of the path is a nearest-neighbour path such that, for all  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $y_{i+1}^{(x)}$  is a neighbour of  $y_i^{(x)}$  such that

$$p^\omega(y_i^{(x)}, y_{i+1}^{(x)} - y_i^{(x)}) = \max_{e \in U: y_i^{(x)} + e \notin \mathfrak{H}_{y_i^{(x)} - x}} p^\omega(y_i^{(x)}, e) = Q_{y_i^{(x)}}^{\mathfrak{H}_{y_i^{(x)} - x}},$$

where  $Q$  is defined in (3.3), and  $y_{i+1}^{(x)}$  is chosen arbitrarily if several vertices realize this last equality.

Note also that, for all  $x \in \mathfrak{H}$ ,  $y_0^{(x)}$  and  $y_1^{(x)}$  are not necessarily neighbors.

Essentially, the path  $\mathcal{Y}_x^{(n)}$  first goes out of the Markovian hypercube using the corner  $x_0(\omega) + x$  and then continues in the same global direction for  $n-1$  steps (see Figure 3.4), such that it goes further from 0 at each step, using the same orthonormal basis that points out of  $h(w)$  from  $x_0(\omega) + x$ . Hence, for all  $x \in \mathfrak{H}$ ,  $|y_n^{(x)}|_1 \geq n$ .

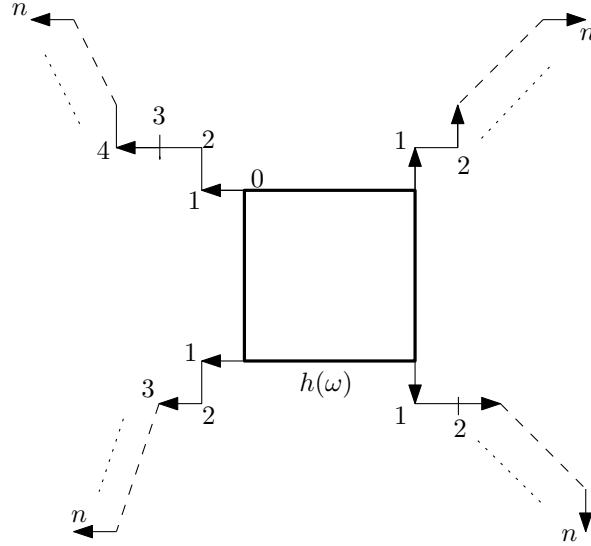


FIGURE 3.4 – Chosen “paths” to reach a point at distance  $n$ .

Notice that once the paths  $(\mathcal{Y}_x^{(n)})_{x \in \mathfrak{H}}$ , are out of the Markovian hypercube, they do not intersect. That fact is very helpful in the computations of the following Proposition 5.2.

Even though  $\mathcal{Y}_x^{(n)}$  is not a path, we call quenched probability of the path  $\pi_x^{(n)}$  of  $\mathcal{Y}_x^{(n)}$  the following quantity

$$\pi_x^{(n)} = P_0^\omega \left( T_{\partial h(\omega)} < T_0^+, X_{T_{\partial h(\omega)}} = y_1^{(x)} \right) \prod_{i=1}^{n-1} Q_{y_i}^{\mathfrak{H}_{y_i-x}}, \quad (5.1)$$

dropping the superscript “ $(x)$ ” of the  $y_i$ ’s for simplicity.

The next proposition states that, with high  $\mathbf{P}$ -probability, one of the paths depicted in Figure 3.4 has a decent chance of being followed.

**Proposition 5.2.** *Consider a RWRE in an elliptic environment satisfying condition  $(K)_\alpha$ ,  $\alpha > 0$ . For any  $\delta > 0$ , there exists a constant  $\eta > 0$ , such that, for any  $u$  large enough, we have*

$$\mathbf{P} \left( \max_{x \in \mathfrak{H}} \pi_x^{(\lfloor \eta \log(u) \rfloor)} < u^{-\frac{\alpha+2\delta}{\alpha+\varepsilon}} \right) \leq \frac{1}{u^{\alpha+\delta}},$$

where  $\lfloor \cdot \rfloor$  is the floor function,  $\pi_x^{(n)}$  is defined by (5.1) and  $\varepsilon$  comes from condition  $(K)_\alpha$ .

*Démonstration.* Let us emphasize again some facts about the paths  $\mathcal{Y}_x^{(n)}$ ,  $x \in \mathfrak{H}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , and their quenched probability  $\pi_x^{(n)}$  :

1. out of the Markovian hypercube  $h(\omega)$ , the paths do not intersect, i.e.

$$\bigcap_{x \in \mathfrak{H}} \{y_i^{(x)}, i \in \{1, \dots, n\}\} = \emptyset;$$

2. for any  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , conditionnally on  $h(w)$  and  $y_0^{(x)}, \dots, y_i^{(x)}$ , for all  $x \in \mathfrak{H}$ , the quenched probabilities  $p^\omega(y_i^{(x)}, y_{i+1}^{(x)} - y_i^{(x)})$  are independent and are distributed like the random variable  $Q_x^\mathfrak{H}$  defined in (3.3). These independence properties rely on the fact that  $h(\omega)$  is a Markovian hypercube, in particular here we use Remark 3.3.
3. using the definition (3.4), we have that, for any  $x \in \mathfrak{H}$ ,

$$P_0^\omega \left( T_{\partial h(\omega)} < T_0^+, X_{T_{\partial h(\omega)}} = y_1^{(x)} \right) \geq \frac{1}{d} \tilde{Q}_{0, x_0(\omega)+x}^{h(\omega)},$$

thus, using (5.1),

$$\pi_x^{(n)} \geq \frac{1}{d} \tilde{Q}_{0, x_0(\omega)+x}^{h(\omega)} \prod_{i=1}^{n-1} Q_{y_i}^{\mathfrak{H}_{y_i-x}}.$$

Now, fix  $\eta > 0$  and  $\delta > 0$  and recall Definition 3.4 of the marks  $(\alpha_x(\omega))_{x \in \mathfrak{H}}$  of the marked Markovian hypercube  $(h(\omega), (\alpha_x(\omega))_{x \in \mathfrak{H}})$ . Using Markov inequality, the condition  $(K)_\alpha$  and the previous remarks, we have, for all  $u > \exp(1/\eta)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left( \max_{x \in \mathfrak{H}} \pi_x^{(\lfloor \eta \log(u) \rfloor)} < u^{-\frac{\alpha+2\delta}{\alpha+\varepsilon}} \right) &\leq \frac{d^{\alpha+\varepsilon}}{u^{\alpha+2\delta}} \mathbf{E} \left( \min_{x \in \mathfrak{H}} \left( d \pi_x^{(\lfloor \eta \log(u) \rfloor)} \right)^{-(\alpha+\varepsilon)} \right) \\ &\leq \frac{d^{\alpha+\varepsilon}}{u^{\alpha+2\delta}} \mathbf{E} \left( \prod_{x \in \mathfrak{H}} \left( d \pi_x^{(\lfloor \eta \log(u) \rfloor)} \right)^{-(\alpha_x(\omega) \wedge \gamma_x)} \right) \\ &\leq \frac{d^{\alpha+\varepsilon}}{u^{\alpha+2\delta}} \mathbf{E} \left[ \prod_{x \in \mathfrak{H}} \left( \left( \tilde{Q}_{0, x_0(\omega)+x}^{h(\omega)} \right)^{-\alpha_x(\omega)} \prod_{i=1}^{\lfloor \eta \log(u) \rfloor - 1} \left( Q_{y_i}^{\mathfrak{H}_{y_i-x}} \right)^{-\gamma_x} \right) \right] \\ &\leq \frac{d^{\alpha+\varepsilon}}{u^{\alpha+2\delta}} \mathbf{E} \left[ \prod_{x \in \mathfrak{H}} \left( \tilde{Q}_{0, x_0(\omega)+x}^{h(\omega)} \right)^{-\alpha_x(\omega)} \right] \\ &\quad \times \prod_{x \in \mathfrak{H}} \left[ \mathbf{E} \left( (Q_x^\mathfrak{H})^{-\gamma_x} \right) \right]^{\lfloor \eta \log(u) \rfloor - 1}, \end{aligned}$$

where we used all previously mentioned independence properties. Introducing

$$C := \max \left[ \mathbf{E} \left( \prod_{x \in \mathfrak{H}} \left( \tilde{Q}_{0, x_0(\omega)+x}^{h(\omega)} \right)^{-\alpha_x(\omega)} \right); \mathbf{E} \left( (Q_x^\mathfrak{H})^{-\gamma_x} \right), x \in \mathfrak{H} \right] < \infty.$$

which is finite thanks to condition  $(K)_\alpha$ , we can see that

$$\mathbf{P} \left( \max_{x \in \mathfrak{H}} \pi_x^{(\lfloor \eta \log(u) \rfloor)} < u^{-\frac{\alpha+2\delta}{\alpha+\varepsilon}} \right) \leq \frac{d^{\alpha+\varepsilon} C \eta \log(u)}{u^{\alpha+2\delta}}.$$

Finally, for  $\eta > 0$  small enough and  $u$  large enough,

$$\mathbf{P} \left( \max_{x \in \mathfrak{H}} \pi_x^{(\lfloor \eta \log(u) \rfloor)} < u^{-\frac{\alpha+2\delta}{\alpha+\varepsilon}} \right) \leq \frac{1}{u^{\alpha+\delta}}.$$

□



The proof of the following consequence is straightforward.

**Corollary 5.3.** *Consider a RWRE in an elliptic environment satisfying condition  $(K)_\alpha$ ,  $\alpha > 0$ . For any  $\delta > 0$ , there exists a constant  $\eta > 0$ , such that, for any  $u$  large enough, we have*

$$\mathbf{P} \left( \max_{y: |y|_1 = \lfloor \eta \log(u) \rfloor} P_0^\omega (T_y < T_0^+) < u^{-\frac{\alpha+2\delta}{\alpha+\varepsilon}} \right) \leq \frac{1}{u^{\alpha+\delta}},$$

where  $\lfloor \cdot \rfloor$  is the floor function and  $\varepsilon > 0$  comes from condition  $(K)_\alpha$ .

## 5.2 Polynomial condition and atypical quenched exit estimates

In this section, we just recall two results previously obtained by Campos and Ramírez in [19]. This uses conditions  $(E)_0$ ,  $(P)_M^\ell$  and  $(T')$  defined respectively at (1.6), (1.5) and (1.4).

This first theorem states that, under some light assumptions, the polynomial condition implies condition  $(T')$ .

**Theorem 5.4** (Theorem 1.1 of Campos and Ramírez, [19]). *Consider a random walk in an i.i.d. environment in dimensions  $d \geq 2$ . Let  $\ell \in S^{d-1}$  and  $M \geq 15d + 5$ . Assume that the environment satisfies the ellipticity condition  $(E)_0$ . Then the polynomial condition  $(P)_M^\ell$  is equivalent to  $(T')^\ell$ .*

The following proposition allow us to compute atypical quenched exit estimates. Before stating the results, we need some definitions, similar to those introduced in [19, 17].

Let us consider a RWRE in an elliptic i.i.d. environment and  $\ell \in S^{d-1}$ , then  $(P)_M^\ell$  implies that the walk has an asymptotic direction (see [70]), i.e. the following limit exists :

$$\hat{v} := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{|X_n|_2}. \quad (5.2)$$

There exists  $i_0 \in [1, 2d]$  such that  $\hat{v} \cdot e_{i_0} > 0$ . Assume also that  $e_{i_0}$  is the vector of the canonical basis which is the nearest of  $\hat{v}$ , so that the angle between  $v$  and  $e_{i_0}$  is upper-bounded and we have

$$\hat{v} \cdot e_{i_0} \geq \frac{1}{\sqrt{d}}.$$

Moreover, for any  $z \in \mathbb{Z}^d$ , let  $P(z)$  be the projection of  $z$  on  $v$  along the hyperplane  $H := \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot e_{i_0} = 0\}$ , defined by

$$P(z) := \left( \frac{z \cdot e_{i_0}}{\hat{v} \cdot e_{i_0}} \right) \hat{v},$$

### CHAPITRE 3. LOCAL TRAPPING, WITH A. FRIBERGH

---

and let  $Q(z)$  be the projection of  $z$  on  $H$  along  $\hat{v}$  so that

$$Q(z) := z - P(z).$$

For  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\beta > 0$  and  $L > 0$ , we define the *tilted boxes* with respect to the asymptotic direction  $\hat{v}$  by :

$$B_{\beta,L}(x) := \left\{ y \in \mathbb{Z}^d : -L^\beta < (y - x) \cdot e_{i_0} < L, \|Q(y - x)\|_\infty < L^\beta \right\}, \quad (5.3)$$

and their front boundary by

$$\partial^+ B_{\beta,L}(x) := \{y \in \partial B_{\beta,L}(x) : (y - x) \cdot e_{i_0} = L\}. \quad (5.4)$$

**Remark 5.5.** *An elementary geometric computation (see Figure 3.5) shows for  $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^d$  such that  $(x_1 - x_2) \cdot \hat{v} \geq 0$  and  $x_2 \in B_{\beta,L}(x_1)$ , we have  $\|x_1 - x_2\|_\infty \leq (1 + \sqrt{d})L^\beta$  since  $\hat{v} \cdot e_{i_0} \geq \frac{1}{\sqrt{d}}$ .*

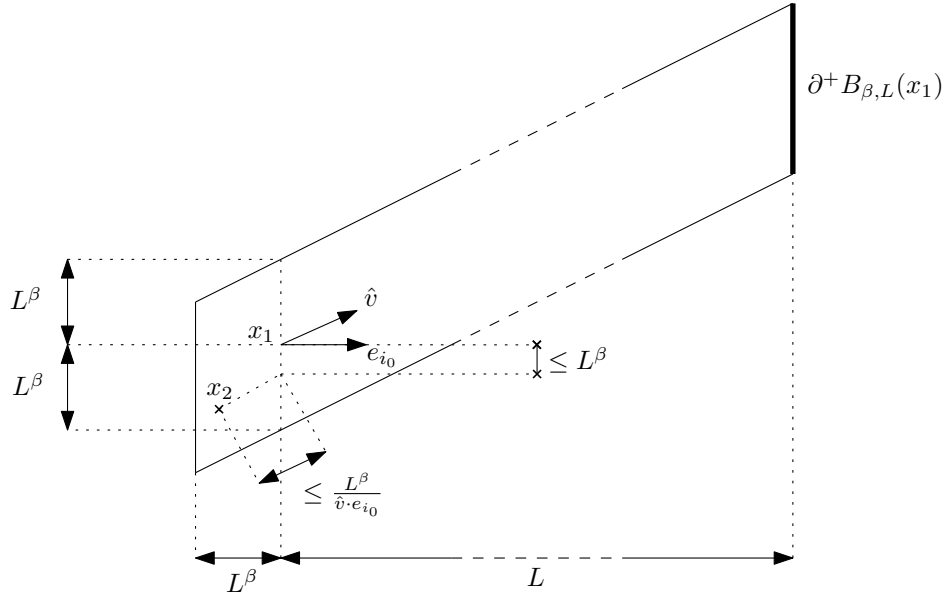


FIGURE 3.5 – The tilted box  $B_{\beta,L}(x_1)$ .

Now, we have the following result from [19] that will be useful for us to show that it is extremely unlikely (super-exponential) that the environment typically sends the walker against  $\hat{v}$  for a long distance.

**Proposition 5.6** (Proposition 4.1 of Campos and Ramírez, [19]). *Assume that  $(E)_0$  holds and that  $(P)_M^\ell$  is also satisfied for some  $M \geq 15d + 5$ . Let  $\beta_0 \in (1/2, 1)$ ,  $\beta \in (\frac{\beta_0+1}{2}, 1)$  and  $\zeta \in (0, \beta_0)$ . Then, for each  $\gamma > 0$ , we have that*

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} L^{-g(\beta_0, \beta, \zeta)} \log \mathbb{P} \left( P_0^\omega \left( X_{T_{B_{\beta,L}(0)}} \in \partial^+ B_{\beta,L}(0) \right) \leq e^{-\gamma L^\beta} \right) < 0,$$

where  $g(\beta_0, \beta, \zeta) := \min \{ \beta + \zeta, 3\beta - 2 + (d-1)(\beta - \beta_0) \}$ .

In the next section, we will also need the following result that give an equivalent criterion for  $(T)_\gamma$ , defined in (1.4). For this purpose, define, for any  $n \geq 1$ , the  $n$ -th regeneration radius by

$$X^{*(n)} := \max_{\tau_{n-1} \leq k \leq \tau_n} |X_k - X_{\tau_{n-1}}|_1,$$

where the  $\tau_n$ 's are defined in (2.4).

The next result from Sznitman shows that if a walk verifies condition  $(T)_\gamma^\ell$  then the trajectory of the walk goes fairly directly in the direction  $\ell$ , more precisely it is shown in [78] that the space explored during before a regeneration time has good tails.

**Proposition 5.7** (Sznitman, [78]). *Consider a RWRE in an elliptic i.i.d. environment. Let  $\gamma \in (0, 1)$  and  $\ell \in S^{d-1}$ . Assume that  $(T)_\gamma^\ell$  holds. Then, there exists a constant  $c$  such that, for every  $L$  and  $n \geq 1$ , we have that*

$$\mathbb{P}(X^{*(n)} > L) \leq Ce^{-cL^\gamma}.$$

### 5.3 Estimates on the tail of $\tau_1$ : proof of Proposition 5.1

Here, we prove Proposition 5.1, which concludes the proof of Theorem 3.5 and Theorem 3.7.

*Proof of Proposition 5.1.* We want to give an estimate on the tail of  $\tau_1$ . In this purpose, we define, for  $u > 0$ , the scale

$$L = L(u) := (c_1 \eta \log u)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (5.5)$$

where  $c_1 \in (0, 1)$ ,  $\eta > 0$  and  $\beta \in (0, 1)$  are constant which will be described later on. We also define the box

$$C_L := \left\{ y \in \mathbb{Z}^d : -\frac{L}{2} < (y - x) \cdot e_{i_0} < \frac{L}{2}, \|Q(y - x)\|_\infty < \frac{L}{2(\hat{v} \cdot e_{i_0})} \right\},$$

using the definition (5.2) of  $\hat{v}$  and recalling  $\hat{v} \cdot e_{i_0} \geq 1/\sqrt{d}$ .

Now, notice that

$$\mathbb{P}(\tau_1 > u) \leq \mathbb{P}(\tau_1 > u, T_{C_L}^{\text{ex}} \leq \tau_1) + \mathbb{P}(T_{C_L}^{\text{ex}} > u), \quad (5.6)$$

where  $T_{C_L}^{\text{ex}}$  is the first time the walker is out of  $C_L$ . Now, we want to give an upper bound for both of these quantities. For the first one, we will use condition  $(T)_\gamma$  and we will use, for the second one, the atypical quenched exit estimates of Proposition 5.6.

*Upper bound for the first term of the right-hand side of (5.6)*

### CHAPITRE 3. LOCAL TRAPPING, WITH A. FRIBERGH

---

First, we can give an estimate for the first quantity using Theorem 5.4 and Proposition 5.7, so that for any  $\gamma \in (\beta, 1)$ ,

$$\mathbb{P}\left(\tau_1 > u, T_{C_L}^{\text{ex}} \leq \tau_1\right) \leq \mathbb{P}\left(X^{*(1)} > \frac{L}{2\sqrt{d}}\right) \leq Ce^{-cL^\gamma}. \quad (5.7)$$

*Upper bound for the second term of the right-hand side of (5.6)*

Now, let us give an estimate for the second quantity of the right-hand side of (5.6). The general strategy is first to notice that, on the event  $\{T_{C_L}^{\text{ex}} > u\}$ , there exists some vertex  $x \in C_L$  such that the probability starting from that point  $x$  to come back to it before exiting  $C_L$  is not too small. On the other hand, Corollary 5.3 implies that there exists another point  $y$ , sufficiently far away from  $x$ , such that the probability to go from  $x$  to  $y$  without coming back to  $x$  is great enough. These two facts together will imply that the quenched probability to exit a tilted box (see (5.3)) by the sides or the backside is large : this is an atypical quenched exit estimate, which annealed probability is upper bounded by Proposition 5.6.

On the event  $\{T_{C_L}^{\text{ex}} > u\}$ , there is a.s.a random  $x_1 \in C_L$  such that

$$\mathcal{N}_{x_1} := \left| \left\{ k : 0 \leq l \leq T_{C_L}^{\text{ex}}, X_k = x_1 \right\} \right| \geq \frac{u}{|C_L|}, \quad (5.8)$$

which means that

$$\{T_{C_L}^{\text{ex}} > u\} \subset \left\{ \exists x \in C_L : \mathcal{N}_x \geq \frac{u}{|C_L|} \right\}.$$

Note that, for any  $x \in C_L$ , if the walk starts from  $x$ , then  $\mathcal{N}_x$  is a geometric random variable of parameter  $P_x^\omega(T_{C_L}^{\text{ex}} < T_x^+)$ , hence we get

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{N}_x \geq \frac{u}{|C_L|}, P_x^\omega(T_{C_L}^{\text{ex}} < T_x^+) \geq 2\frac{|C_L|}{u}L\right) \leq e^{-L}.$$

Using the two last equations, we see that

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T_{C_L}^{\text{ex}} > u] &\leq \mathbb{P}\left(T_{C_L}^{\text{ex}} > u, \inf_{x \in C_L} P_x^\omega(T_{C_L}^{\text{ex}} < T_x^+) < 2\frac{|C_L|}{u}L\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\exists x \in C_L : \mathcal{N}_x \geq \frac{u}{|C_L|}, \inf_{x \in C_L} P_x^\omega(T_{C_L}^{\text{ex}} < T_x^+) \geq 2\frac{|C_L|}{u}L\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(T_{C_L}^{\text{ex}} > u, \exists x_1 \in C_L : P_{x_1}^\omega(T_{C_L}^{\text{ex}} < T_{x_1}^+) < 2\frac{|C_L|}{u}L\right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned}
& + |C_L| \max_{x \in C_L} \mathbb{P} \left( \mathcal{N}_x \geq \frac{u}{|C_L|}, P_x^\omega (T_{C_L}^{\text{ex}} < T_x^+) \geq 2 \frac{|C_L|}{u} L \right) \\
& \leq |C_L| e^{-L} + \mathbb{P} \left( T_{C_L}^{\text{ex}} > u, \exists x_1 \in C_L : P_{x_1}^\omega (T_{C_L}^{\text{ex}} < T_{x_1}^+) < 2 \frac{|C_L|}{u} L \right).
\end{aligned}$$

Let  $\mathcal{A}$  be the event on which there exists  $x_1 \in C_L$  and a vertex  $x_2 \in \mathbb{Z}^d$  such that  $|x_2 - x_1|_1 = \lfloor \eta \log(u) \rfloor$  and

1. the following inequality holds

$$P_{x_1}^\omega (T_{C_L} < T_{x_1}^+) < 2 \frac{|C_L|}{u} L;$$

2. and the following inequality holds

$$P_{x_1}^\omega (T_{x_2} < T_{x_1}^+) \geq u^{-\frac{\alpha+2\delta}{\alpha+\varepsilon}}.$$

We can see that on  $\mathcal{A}$  we have for  $u$  large enough,

$$P_{x_1}^\omega (T_{x_2} < T_{x_1}^+ \wedge T_{C_L}^{\text{ex}}) \geq \frac{1}{2} u^{-\frac{\alpha+2\delta}{\alpha+\varepsilon}}, \quad (5.10)$$

which, in particular, implies that  $x_2 \in C_L$ .

Besides, recall that  $(K)_\alpha$  holds and that some  $\varepsilon > 0$  is associated with that condition. Then, fixing  $\delta \in (0, \varepsilon/4)$ , by Corollary 5.3 there exists  $\eta > 0$  small enough such that, as soon as  $u$  is large enough,

$$\mathbb{P} \left( \exists x \in C_L : \max_{y: |y-x|_1 = \lfloor \eta \log(u) \rfloor} P_x^\omega (T_y < T_x^+) < u^{-\frac{\alpha+2\delta}{\alpha+\varepsilon}} \right) \leq \frac{|C_L|}{u^{\alpha+\delta}}. \quad (5.11)$$

Using (5.9) and (5.11), we get the upper bound :

$$\mathbb{P}[T_{C_L}^{\text{ex}} > u] \leq |C_L| \left( u^{-(\alpha+\delta)} + e^{-L} \right) + \mathbb{P}(\mathcal{A}, T_{C_L}^{\text{ex}} > u). \quad (5.12)$$

Note also that, as soon as  $u$  is large enough and using (5.5),

$$|x_2 - x_1|_1 = \lfloor \eta \log(u) \rfloor \geq \frac{\eta}{2} \log(u) = \frac{1}{2c_1} L^\beta, \quad (5.13)$$

recalling that  $c_1 \in (0, 1)$  is a constant that we will fix later on.

Now, let us consider the tilted box  $B_{\beta,L}(x_1)$  defined in (5.3) with  $c_1 < (4d^2)^{-1}$  and distinguish two cases on the event  $\mathcal{A}$ .

*First case : on the event  $\mathcal{A} \cap \{x_2 \in B_{\beta,L}(x_1)\}$*

### CHAPITRE 3. LOCAL TRAPPING, WITH A. FRIBERGH

---

First, if  $x_2 \in B_{\beta,L}(x_1)$ , we will prove that  $x_1 \notin B_{\beta,L}(x_2)$ .

Let us assume by contradiction that  $x_1 \in B_{\beta,L}(x_2)$ , we can see that by Remark 5.5 (which can always be applied since  $x_1$  and  $x_2$  play symmetric roles for this computation)

$$\|x_1 - x_2\|_1 \leq d(1 + \sqrt{d})L^\beta.$$

The previous equation contradicts (5.13) since we just chose  $c_1 < (4d^2)^{-1}$ . Hence  $x_1 \notin B_{\beta,L}(x_2)$ .

Moreover, one has that

$$\begin{aligned} P_{x_1}^\omega(T_{C_L}^{\text{ex}} < T_{x_1}^+) &\geq P_{x_1}^\omega(T_{x_2} < T_{C_L}^{\text{ex}} \wedge T_{x_1}^+) \times P_{x_2}^\omega(T_{C_L}^{\text{ex}} < T_{x_1}) \\ &\geq \frac{1}{2u^{\frac{\alpha+2\delta}{\alpha+\varepsilon}}} \times P_{x_2}^\omega(T_{C_L}^{\text{ex}} < T_{x_1}), \end{aligned}$$

where we used the fact that we are on  $\mathcal{A}$  (see (5.10)). Furthermore, the definition of  $\mathcal{A}$ , then implies

$$P_{x_2}^\omega(T_{C_L}^{\text{ex}} < T_{x_1}) \leq 4 \frac{|C_L| \times L}{u^{\frac{\varepsilon}{2(\alpha+\varepsilon)}}}.$$

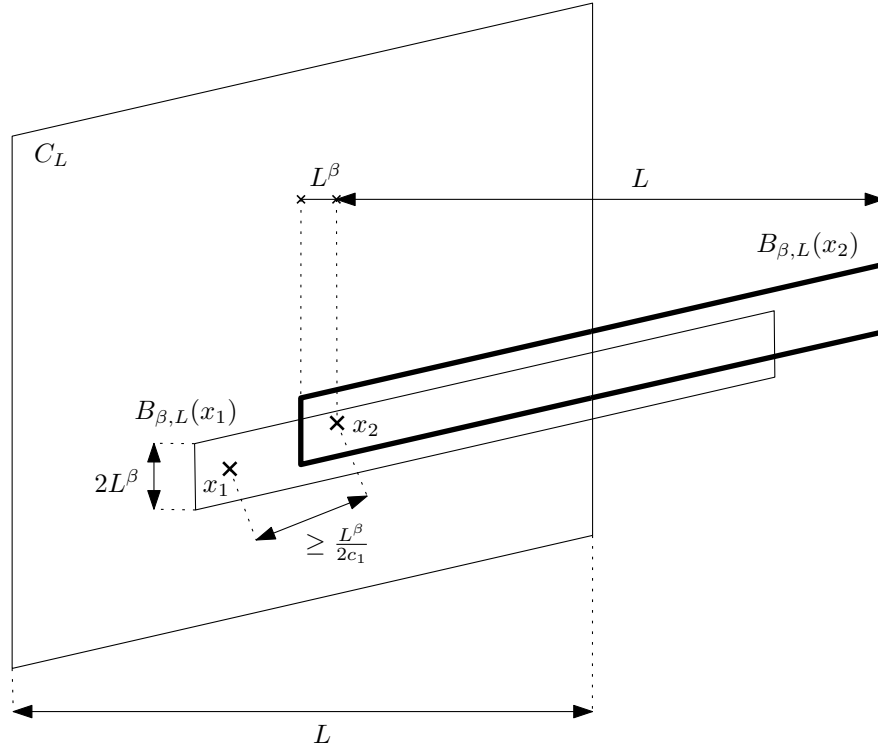


FIGURE 3.6 – From  $x_2$ , the walker has to exit  $B_{\beta,L}(x_2)$  before visiting  $x_1$ .

This last inequality implies that the probability, starting from  $x_2$ , to exit  $C_L$  before visiting  $x_1$  is very small. This fact implies that the probability to exit  $B_{\beta,L}(x_2)$  through its front boundary is very small as well (see Figure 3.6).

$$P_{x_2}^\omega \left( X_{T_{B_{\beta,L}(x_2)}} \in \partial^+ B_{\beta,L}(x_2) \right) \leq P_{x_2}^\omega \left( T_{C_L}^{\text{ex}} < T_{x_1} \right) \leq 4 \frac{|C_L| \times L}{u^{\frac{\varepsilon}{2(\alpha+\varepsilon)}}}. \quad (5.14)$$

*Second case : on the event  $\mathcal{A} \cap \{x_2 \notin B_{\beta,L}(x_1)\}$*

If  $x_2$  does not belong to  $B_{\beta,L}(x_1)$ , then it is obvious that the walker cannot visit  $x_2$  without exiting the tilted box (see Figure 3.7). This means that

$$P_{x_1}^\omega \left( T_{x_2} < T_{C_L}^{\text{ex}} \wedge T_{x_1}^+ \right) \leq P_{x_1}^\omega \left( T_{B_{\beta,L}(x_1)} < T_{x_1}^+ \right)$$

The walker cannot visit too many times  $x_1$  before exiting  $B_{\beta,L}(x_1)$ , indeed the walker goes relatively easily from  $x_1$  to  $x_2$  and  $x_2$  can only be reached by exiting  $B_{\beta,L}(x_1)$ .

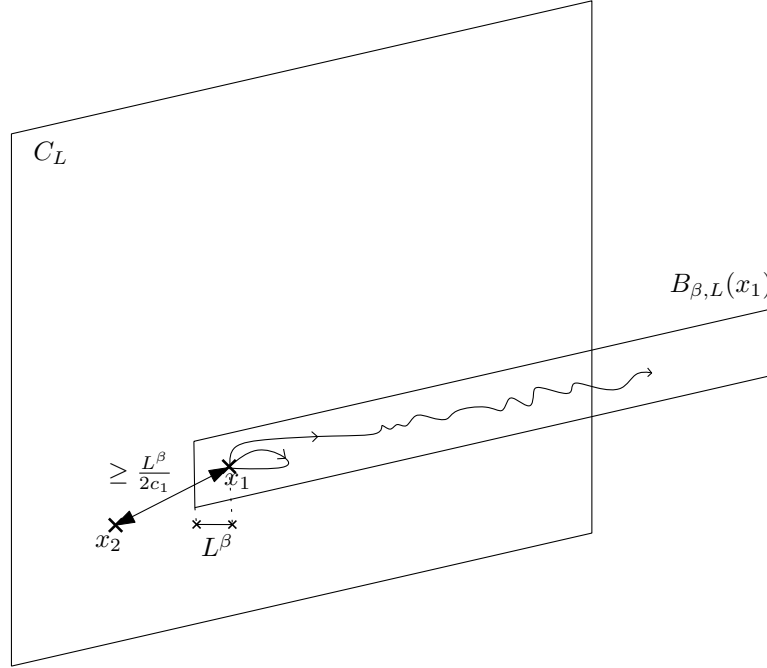


FIGURE 3.7 – From  $x_1$ , the walker has to exit  $B_{\beta,L}(x_1)$  before visiting  $x_2$ .

More precisely, recalling the definition (5.8) of  $\mathcal{N}_{x_1}$  and using the previous equation in the third line, we see that on  $\mathcal{A}$

$$P_{x_1}^\omega \left( X_{T_{B_{\beta,L}(x_1)}} \in \partial^+ B_{\beta,L}(x_1) \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P_{x_1}^\omega \left( X_{T_{B_{\beta,L}(x_1)}} \in \partial^+ B_{\beta,L}(x_1), \mathcal{N}_{x_1} = n + 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq P_{x_1}^\omega \left( T_{C_L}^{\text{ex}} < T_{x_1}^+ \right) \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[ P_{x_1}^\omega \left( T_{x_1}^+ < T_{B_{\beta,L}(x_1)} \right) \right]^n \\
&\leq P_{x_1}^\omega \left( T_{C_L}^{\text{ex}} < T_{x_1}^+ \right) \times \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - P_{x_1}^\omega \left( T_{x_2} < T_{C_L}^{\text{ex}} \wedge T_{x_1}^+ \right) \right)^n \\
&\leq \frac{P_{x_1}^\omega \left( T_{C_L}^{\text{ex}} < T_{x_1}^+ \right)}{P_{x_1}^\omega \left( T_{x_2} < T_{C_L}^{\text{ex}} \wedge T_{x_1}^+ \right)} \leq 4 \frac{|C_L| \times L}{u^{\frac{\varepsilon}{2(\alpha+\varepsilon)}}}. \tag{5.15}
\end{aligned}$$

*Atypical quenched exit estimates on  $\mathcal{A}$*

By (5.14) and (5.15), we have that, on  $\mathcal{A}$ , there a.s. exists  $x \in C_L$  such that, for some positive constant  $c_3$ , we have that, as soon as  $L$  is large enough,

$$P_x^\omega \left( X_{T_{B_{\beta,L}(x)}} \in \partial^+ B_{\beta,L}(x) \right) \leq e^{-c_3 L^\beta}.$$

Let us stress that the constants  $c_1$  and  $\eta$  have been fixed, so we will not emphasize them in the following computations. By using Proposition 5.6, we obtain a function  $g(\beta_0, \beta, \zeta)$  such that

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \left[ P_x^\omega \left( X_{T_{B_{\beta,L}(x)}} \in \partial^+ B_{\beta,L}(x) \right) \leq e^{-c_3 L^\beta} \right] &\leq C \exp \left( -c L^{g(\beta_0, \beta, \zeta)} \right) \\
&\leq C \exp \left( -c (\log u)^{\frac{g(\beta_0, \beta, \zeta)}{\beta}} \right),
\end{aligned}$$

where we recall that  $L$  was defined at (5.5).

An elementary computation shows that  $g(\beta_0, \beta, \zeta) > \beta$  for  $\beta$  close to 1,  $\beta_0$  close to  $1/2$  and  $\zeta > 0$ . Thus, for such a choice of constants, there exists  $\varepsilon' > 0$  such that for  $u$  is large enough,

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) \leq e^{-c_4 (\log u)^{1+\varepsilon'}}. \tag{5.16}$$

*Conclusion*

The inequality (5.6) and the estimates (5.7), (5.12) and (5.16), we conclude that, as soon as  $u$  is large enough,

$$\mathbb{P}(\tau_1 > u) \leq \frac{1}{u^{\alpha + \frac{\delta}{2}}},$$

for some  $\delta > 0$ . □

**Remark 5.8.** Notice that in this last proof, the only limiting factor that prevents us to obtain moments of any order on  $\tau_1$  is (5.11) which describes the probability to reach a certain point at distance of order  $\log n$ .



## 6 Zero-speed regime

In this section, let us prove Theorem 3.1. To accomplish this, we need to identify where trapping comes from.

For this, we say that a vertex  $x \in \mathbb{Z}^d$  is  $\kappa$ -elliptic if for all  $e \in U$ , we have  $p^\omega(x, e) \in (\kappa, 1 - \kappa)$ . By (1.2) it is clear that there exists  $\kappa_0 > 0$  such that  $\mathbf{P}[x \text{ is } \kappa_0\text{-elliptic}] > 1/2$  for any  $x \in \mathbb{Z}^d$ . To be concise, we will say that a vertex is regular if it is  $\kappa_0$ -elliptic.

Let us introduce the sets

$$\mathcal{A} := \{z \notin \mathfrak{H}_{de_1}, \text{ such that for some } y \in \mathfrak{H}_{de_1}, \|z - y\|_\infty = 1\}.$$

and

$$\mathcal{B} := \{0, e_1, \dots, (d-1)e_1\}.$$

It is plain to see that

1.  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  is connected,
2.  $\mathcal{A}$  contains  $\partial\mathfrak{H}_{de_1}$ ,
3.  $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}^+(0)$  (defined at (2.1)). This can be seen easily from (1.1).

Let us introduce the event

$$\mathcal{R} = \{\text{any } x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \text{ is regular}\}, \quad (6.1)$$

it is clear that  $\mathbf{P}[\mathcal{R}] > 0$ .

Finally, for every  $x \in \mathfrak{H}_{de_1}$ , we denote  $\mathcal{B}_x$  the unique orthonormal basis such that for every  $e \in \mathcal{B}_x$  we have  $x + e \in \mathfrak{H}_{de_1}$ .

The general idea is to investigate the probability of events such that some unit hypercube is surrounded by regular points, but transition probabilities inside the hypercube are not conditioned. Thus, on such an event, the walker moves easily around the hypercube but could get trapped in it, as the exit time of the hypercube is not conditioned and is independent of the environment outside it (see Figure 3.8).

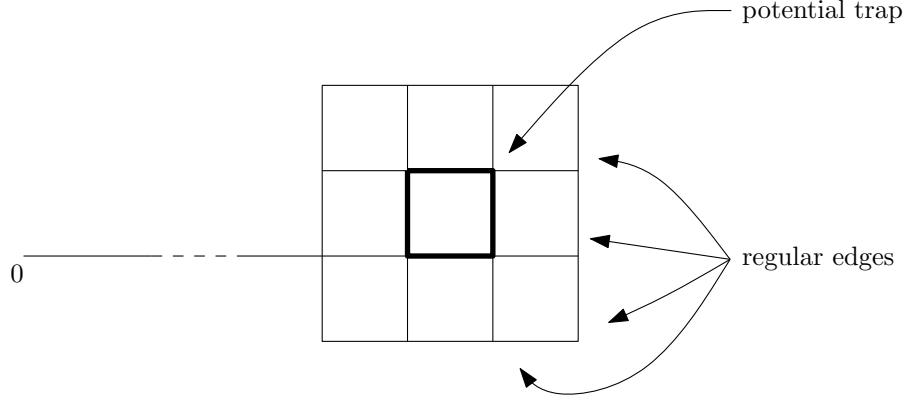
The following lemma shows that tail estimates on the exit time of hypercubes can be used to find lower bounds on regeneration times.

**Lemma 6.1.** *Let us consider a RWRE in an elliptic i.i.d. environment. We have, for some constant  $c > 0$ ,*

$$\mathbb{P}[\tau_1 \geq n \mid 0 - \text{regen}] \geq c \max_{x \in \mathfrak{H}} \mathbb{P}_x[T_{\mathfrak{H}}^{\text{ex}} \geq n].$$

*Démonstration.* We fix  $x_0 \in \mathfrak{H}$  which realizes the maximum  $\max_{x \in \mathfrak{H}} \mathbb{P}_x[T_{\mathfrak{H}}^{\text{ex}} \geq n]$ .

Let us now describe an event which slows the walk down and which can happen on  $\{0 - \text{regen}\}$ . On  $\mathcal{R}$ , consider the following chain of events


 FIGURE 3.8 – The environment  $\mathcal{R}$  on which we construct trapping.

1.  $X_1 = e_1, X_2 = 2e_1, \dots, X_d = (d-1)e_1$ ,
2. from there  $X_n$  takes the shortest path inside  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  to  $de_1 + x_0$ , this can be done in at most  $C(d)$  steps (where  $C(d)$  depends only on  $d$ ).
3. Then, we stay on  $\mathfrak{H}_{de_1}$  for a time  $T_{\mathfrak{H}_{de_1}}^{\text{ex}} \circ \theta_{T_{de_1+x_0}} \geq n$ , where  $\theta$  is a shift operator,
4. after exiting  $\mathfrak{H}_{de_1}$ , the walk has to be in  $\mathcal{A}$ . From there, the walk takes the shortest path to  $e_1$  inside  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  and then the shortest path from  $e_1$  to  $de_1 + 2 \sum_{i=1}^d e_i$  (which has never been visited) inside  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ . All this can be accomplished in less than  $C(d)$  steps (where  $C(d)$  depends only on  $d$ ). This step ensures that  $\tau_1$  occurs after  $T_{\mathfrak{H}_{de_1}}^{\text{ex}} \circ \theta_{T_{de_1+x_0}}$ .
5. Finally, the walk makes one step to  $(d+1)e_1 + 2 \sum_{i=1}^d e_i$ , and from there never backtracks, creating a new regeneration time.

Let us denote  $F_n$  the chain of events described above (in (1), (2), (3), (4), (5)). We can see that on  $F_n$ , we have

1.  $D = \infty$ ,
2.  $\tau_1 \geq T_{\mathfrak{H}_{de_1}}^{\text{ex}} \circ \theta_{T_{de_1+x_0}} + T_{de_1+x_0} \geq n$ .

This implies that

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tau_1 \geq n \mid 0 - \text{regen}] &\geq c\mathbb{P}[\tau_1 \geq n, 0 - \text{regen}] \\ &\geq c\mathbf{E}[\mathbf{1}_{\mathcal{R}P_0^\omega}[F_n]]. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Now, we want to give a lower bound of  $P_\omega[F_n]$  on the event  $\mathcal{R}$ . This can be done by applying several times the strong Markov property at the times  $d-1, T_{de_1+x_0}, T_{\mathfrak{H}_{de_1}}^{\text{ex}} \circ \theta_{T_{de_1+x_0}} + T_{de_1+x_0}, T_{de_1+2 \sum_{i=1}^d e_i}$ . This leads us to lower-bound the five terms described above.

1. On  $\mathcal{R}$ , we have that

$$P_0^\omega[X_1 = e_1, X_2 = 2e_1, \dots, X_{d-1} = (d-1)e_1] \geq \kappa_0^{d-1}.$$

2. Let us denote  $C_1$  the event that the walk takes the shortest path from  $(d-1)e_1$  to  $x_0 + de_1$  inside  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ . On  $\mathcal{R}$ , we have that

$$P_{(d-1)e_1}^\omega[C_1] \geq \kappa_0^{C(d)}.$$

3. After applying the Markov property, the third term becomes  $P_{de_1+x_0}^\omega[T_{\mathfrak{H}_{de_1}}^{\text{ex}} \geq n]$ .

4. Let us denote  $C_2$  the event that the walk takes the shortest path to  $e_1$  inside  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  and then the shortest path from  $e_1$  to  $de_1 + 2 \sum_{i=1}^d e_i$  inside  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ . It is easy to see, on  $\mathcal{R}$ , that

$$\min_{y \in \partial \mathfrak{H}} P_y^\omega[C_2] \geq \kappa_0^{C(d)}.$$

5. Finally, we see that, on  $\mathcal{R}$ ,

$$P_{de_1+2 \sum_{i=1}^d e_i}^\omega[X_1 = (d+1)e_1 + 2 \sum_{i=1}^d e_i, D \circ \theta_1 = \infty] \geq \kappa_0 P_{(d+1)e_1+2 \sum_{i=1}^d e_i}^\omega[D = \infty].$$

As mentioned, those estimates combined with the strong Markov property imply that on  $\mathcal{R}$ , we have

$$P_0^\omega[F_n] \geq c(\kappa_0, d) P_{de_1+x_0}^\omega[T_{\mathfrak{H}_{de_1}}^{\text{ex}} \geq n] P_{(d+1)e_1+2 \sum_{i=1}^d e_i}^\omega[D = \infty].$$

This estimate combined with (6.2) implies that

$$\mathbb{P}[\tau_1 \geq n \mid 0 - \text{regen}] \geq c \mathbf{E} \left[ \mathbf{1}_{\mathcal{R}} P_{de_1+x_0}^\omega[T_{\mathfrak{H}_{de_1}}^{\text{ex}} \geq n] P_{(d+1)e_1+2 \sum_{i=1}^d e_i}^\omega[D = \infty] \right].$$

Note that by independence of the transition probabilities, the random variables  $P_{de_1+x_0}^\omega[T_{\mathfrak{H}_{de_1}}^{\text{ex}} \geq n]$ ,  $\mathbf{1}_{\mathcal{R}}$  and  $P_{(d+1)e_1+2 \sum_{i=1}^d e_i}^\omega[D = \infty]$  are all  $\mathbf{P}$ -independent. This means that

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tau_1 \geq n \mid 0 - \text{regen}] &\geq c \mathbf{P}[\mathcal{R}] \mathbf{E} \left[ P_{de_1+x_0}^\omega[T_{\mathfrak{H}_{de_1}}^{\text{ex}} \geq n] \right] \mathbf{E} \left[ P_{(d+1)e_1+2 \sum_{i=1}^d e_i}^\omega[D = \infty] \right] \\ &\geq c \mathbb{P}_{x_0}[T_{\mathfrak{H}}^{\text{ex}} \geq n] \mathbb{P}[D = \infty], \end{aligned}$$

where we used translation invariance and the fact that  $\mathbf{P}[\mathcal{R}] > 0$  in the last line. The result follows from the definition of  $x_0$  and (2.2).  $\square$

Let us now prove Theorem 3.1.

### CHAPITRE 3. LOCAL TRAPPING, WITH A. FRIBERGH

---

*Proof of Theorem 3.1.* It is easy to see from Lemma 6.1 that a RWRE in an elliptic i.i.d. environment verifies

$$\mathbb{E}[\tau_1^\alpha \mid 0 - \text{regen}] \geq c \max_{x \in \mathfrak{H}} \mathbb{E}_x \left[ \left( T_{\mathfrak{H}}^{\text{ex}} \right)^\alpha \right].$$

This means that for a walk verifying  $(E)$  and  $(H)_\alpha$  for some  $\alpha > 0$  we have

$$\mathbb{E}[\tau_1^\alpha \mid 0 - \text{regen}] = \infty. \tag{6.3}$$

Theorem 3.1 follows from the previous equation and Theorem 2.4.  $\square$

#### Acknowledgments.

We would like to thank Alejandro Ramírez for useful discussions.

# 4

## Reinforcement learning in social networks, joint work with Pierre Tarrès

We propose a model of network formation based on reinforcement learning, which generalises the one proposed by Skyrms [2, 45] in the case of signaling games. On a discrete graph, whose vertices represent individuals, at any time step each of them picks one of its neighbours with a probability proportional to their past number of communications; independently, Nature chooses, with an independent identical distribution in time, which ones are allowed to communicate. Communications occur when any two neighbours mutually pick each other and are both allowed by Nature to communicate.

Our results generalize the ones obtained by Hu, Skyrms and Tarrès in [45]. We prove that the expected rate of communications increases in average and thus converges a.s, and that a limit graph emerges. We show that stable configurations for this graph consist in star-shaped connected components with uniform weights. Conversely, any graph correspondence with the preceding property, and within which every vertex is connected to at least another one, is a limit configuration with positive probability.

## 1 Introduction

We introduce and analyse a model of network formation, based on one hand on a reciprocity condition - we can talk to somebody only if he conversely wants to talk to us - and on the other hand on a reinforcement learning procedure - we want to talk more to the ones we already talked to frequently.

Start with a weighted graph  $G = (\mathbb{V}, E, \sim)$ , where the vertices in  $\mathbb{V}$  represent people, and nonoriented edges in  $E$  represent links between them. Assume that no vertex is isolated, i.e. that for all  $i \in \mathbb{V}$ , there exists  $j \in \mathbb{V}$  such that  $\{i, j\} \in E$  (also denoted by  $i \sim j$ ).

Let  $\mathcal{A} := (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{V}}$  be a collection of nonnegative real numbers such that, for any  $i, j \in \mathbb{V}$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$ , and  $a_{ij} > 0$  if and only if  $\{i, j\} \in E$ ;  $a_{ij}$  represents the affinity between  $i$  and  $j$ . Let the network  $G_{\mathcal{A}}$  be the graph  $G$  with weights  $\mathcal{A}$ .

Now consider the following game on the network  $G_{\mathcal{A}}$ , whose players are the vertices of  $G$ . The game is composed by infinitely many rounds (one at each time step), and each of them consists in the following procedure :

- each vertex  $i \in \mathbb{V}$  chooses one, and only one, of its neighbours  $j \sim i$ ;
- Nature independently picks a subset  $V \subseteq \mathbb{V}$  of vertices, allowed to communicate ;
- if  $i, j \in V$ ,  $i \sim j$  and  $i$  and  $j$  mutually choose each other, then a communication occurs between them and they both receive a payoff equal to their affinity  $a_{ij}$ .

We model the choice by Nature of the set of vertices which are allowed to communicate at each time step by a random independent identical Bernoulli distribution on the set of subsets of  $\mathbb{V}$ , denoted by  $\mathcal{P}(\mathbb{V})$ .

More precisely, we let  $(p_V)_{V \in \mathcal{P}(\mathbb{V})}$  be a family of nonnegative real numbers such that

$$\sum_{V \in \mathcal{P}(\mathbb{V})} p_V = 1,$$

and assume that the sequence of subsets  $V_n \in \mathcal{P}(\mathbb{V})$  chosen by Nature at time  $n \in \mathbb{N}$  is an i.i.d. sequence of Bernoulli random variables with probability  $(p_V)_{V \in \mathcal{P}(\mathbb{V})}$ .

Note that, given any two adjacent vertices  $i, j \in \mathbb{V}$ ,  $i \sim j$ ,

$$p_{ij} := \sum_{V \in \mathcal{P}(\mathbb{V}): i, j \in V} p_V$$

is the probability that  $i$  and  $j$  are both allowed to communicate by Nature at any time step. The numbers  $p_{ij}$  will be important in the results. In general the nonoriented edges  $\{i, j\}$  are not chosen independently of each other by Nature.

Let us describe three noticeable choices of  $(p_V)_{V \in \mathcal{P}(\mathbb{V})}$ .

The most obvious one is  $p_{\mathbb{V}} = 1$ , and  $p_V = 0$  if  $V \neq \mathbb{V}$ , where any adjacent pair of vertices is allowed to communicate together at any time.

Another natural choice is that of a sequence  $(p_V)_{V \in \mathcal{P}(\mathbb{V})}$ , such that  $p_V \neq 0$  if and only if (iff)  $V = \{i\} \cup \{j : j \sim i\}$  for some  $i \in \mathbb{V}$  : at each time step only one particular (random) vertex  $i$  and its neighbours are allowed by Nature to communicate together.

The third choice is that of a signaling game, on which the same reinforcement learning procedure was studied in [45]. Let  $\mathcal{S}_1$  and  $\mathcal{S}_2$  be two disjoint subsets spanning  $\mathbb{V}$ , i.e.  $\mathbb{V} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ ,  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$ . Then assume  $p_V \neq 0$  iff  $V = V_i := \{i\} \cup \mathcal{S}_2$  for some  $i \in \mathcal{S}_1$ . Then  $p_{ij} > 0$  only if  $i \in \mathcal{S}_p$ ,  $j \in \mathcal{S}_q$ ,  $p, q \in \{1, 2\}$ ,  $p \neq q$ . In other words the graph on which communications occur is bipartite in this case, see Figure 4.1. In [45], the bipartite graph is complete, and it is assumed that  $p_{V_i} = 1/M_1$ , where  $M_1$  is the number of vertices in  $\mathcal{S}_1$ , but the condition is not required in this paper.

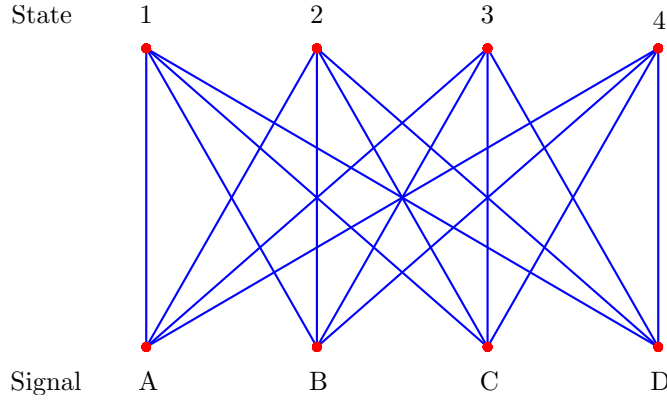


FIGURE 4.1 – In the signaling game,  $\mathcal{S}_1$  and  $\mathcal{S}_2$  correspond respectively to the sets of states of Nature and signals : the agents learn to signal, i.e. they create a common language.

The game being defined, let us now describe how the individuals pick each other. The model we consider here is reinforcement learning, a try-and-error procedure in which agents are more likely to use the strategies that have been efficient before, which in our case means that, *the more an agent has already talked to somebody, the more he will be likely to again talk to him*. At each round, each vertex will choose one of its neighbours with a probability that is proportional to the payoff they shared together so far.

More precisely, for all  $i, j \in \mathbb{V}$ , let us define the *cumulative payoff*  $V_{ij}^n$  (resp.  $V_i^n$ ) on the edge  $\{i, j\}$  (resp. vertex  $i$ ) at time  $n$  by

$$V_{ij}^n = v_{ij}^0 + a_{ij} N_{ij}^n,$$

$$V_i^n = \sum_{j \in \mathbb{V}: j \sim i} V_{ij}^n,$$

where  $v_{ij}^0 > 0$  is a constant and  $N_{ij}^n$  is the number of communications that succeeded between  $i$  and  $j$  at time  $n$ .

## CHAPITRE 4. REINFORCEMENT LEARNING IN SOCIAL NETWORKS, WITH P. TARRÈS

---

Now we assume that, at each time step, any vertex  $i \in \mathbb{V}$  chooses one of its neighbours  $j$  with probability

$$V_{ij}^n / V_i^n.$$

By symmetry,  $j$  also chooses  $i$  among its neighbours with probability

$$V_{ij}^n / V_j^n.$$

Let  $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_n)_n$  be the filtration generated by the process, i.e

$$\mathcal{F}_n := \sigma((V_{ij}^0, \dots, V_{ij}^n), i, j \in \mathbb{V}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Then, the probability of a communication through an edge  $ij \in E$  is

$$\mathbb{P} \left( V_{ij}^{n+1} = V_{ij}^n + a_{ij} \mid \mathcal{F}_n \right) = p_{ij} \frac{(V_{ij}^n)^2}{V_i^n V_j^n}. \quad (1.1)$$

We have now described our learning procedure of the network game. Observe that reinforcement learning is one of a number of models of strategic learning in games, in which players adapt their strategies, with the (possibly unconscious) aim to eventually maximize their payoffs, amongst for instance no-regret learning, fictitious play and its variants, and hypothesis testing, see [93].

In the spectrum of adaptive procedures, reinforcement learning assumes that the players have bounded rationality, in the sense that an optimal strategy would certainly lead to a faster procedure. It is however attractive as a simple behavioral model, since it does not require the agents to be entirely devoted to their task, and even to be aware that they are involved in the formation of a network, but on the contrary just to observe their realised payoffs. Moreover it accumulates inertia, since the relative increase in payoff decreases in time, which might be expected from a learning procedure.

Models of network formation using reinforcement learning were already proposed by Pemantle and Skyrms [74] as follows : each day, each individual chooses one of his neighbours and talks to him, the communication being always accepted by the neighbour ; then both of them reinforce the probability to talk to each other. An important difference is that, in our model, a reciprocity assumption is made, in the sense that the communication is not necessarily accepted by the chosen neighbour.

Let us now summarize the results obtained in this paper, which are described in more detail in Section 2. As explained above, the network game model can be seen as the generalization of the signaling game [73], on which the same reinforcement learning procedure was analyzed by Hu, Skyrms and Tarrès [45]. Our results are generalizations of the ones in [45], and the proofs adapt their techniques to the more general setting.

The main tools are stochastic approximation techniques. In particular, we will approach the behavior of some stochastic process by a deterministic ordinary differential equation (ODE), with the difficulty that the function governing the ODE is not continuous on the boundary of the simplex on which it is defined. One could instead show



that the process, with a different system of coordinates, approximates a smooth dynamics known as the adjusted or Maynard-Smith version of the replicator dynamics [5, 44]. But the process would then take place in an unbounded domain, which would lead to other technical difficulties.

First, we prove that there is a Lyapunov function for the deterministic ODE, which enables us to deduce in Theorem 2.2 the a.s. convergence of the expected payoff. Then we prove in Theorem 2.3 that the occupation measure of the communications converges a.s. to the set of equilibria of the ODE.

In Proposition 2.6, we show a property which characterizes the stable equilibria of the ODE : the graph of the communications associated to a stable configuration consists in connected star-shaped components, or *core and shell* (see Figure 4.2) satisfying a balance condition on the affinities  $a_{ij}$  and probabilities  $p_{ij}$ . In particular each connected component contains a nucleus vertex linked to (one or several) satellite vertices which are only linked to the nucleus.

In Theorem 2.8 we prove that any graph correspondence with the preceding property, such that no vertex is falling out of use, is a limit configuration with positive probability.

In Proposition 4.2 we exhibit, through a particular example, the difference between the case with balanced affinities and the case where they could differ. As we will see, the behavior of the network formation can be radically different.

## 2 Main results

For simplicity we assume that  $p_{ij} > 0$  for any  $i, j \in \mathbb{V}$  such that  $i \sim j$  : if  $p_{ij} = 0$  for some  $i, j \in \mathbb{V}$ , then  $i$  and  $j$  are not allowed to communicate, so that removing the edge  $\{i, j\}$  does not change the process  $(V_{ij}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

For all  $n \in \mathbb{N}$ , define :

$$\begin{aligned} T_n &:= \sum_{i,j \in \mathbb{V}} V_{ij}^n, \\ x_{ij}^n &:= \frac{V_{ij}^n}{T_n}, \text{ for all } i, j \in \mathbb{V}, \\ x_i^n &:= \frac{V_i^n}{T_n} = \sum_{j \in \mathbb{V}: j \sim i} x_{ij}^n, \text{ for all } i \in \mathbb{V}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Note that  $\sum_{i,j} x_{ij}^n = 1$ . Let  $x_n := (x_{ij}^n)_{i,j \in \mathbb{V}}$  be the *occupation measure* at time  $n$ , which belongs to the simplex :

$$\Delta := \left\{ (x_{ij})_{i,j \in \mathbb{V}} : \sum_{i,j \in \mathbb{V}} x_{ij} = 1, \text{ where } x_{ij} = x_{ji} \geq 0, \text{ and } x_{ij} = 0 \text{ if } i \not\sim j \right\}.$$

## CHAPITRE 4. REINFORCEMENT LEARNING IN SOCIAL NETWORKS, WITH P. TARRÈS

---

In order to define the *expected payoff*, let us compute the conditional increment of  $T_n$ , for any  $n \in \mathbb{N}$ , recalling (1.1),

$$\mathbb{E}(T_{n+1} - T_n | \mathcal{F}_n) = \sum_{i,j \in \mathbb{V}} \mathbb{E}(V_{ij}^{n+1} - V_{ij}^n | \mathcal{F}_n) = \sum_{i,j \in \mathbb{V}} a_{ij} p_{ij} \frac{(x_{ij}^n)^2}{x_i^n x_j^n}. \quad (2.2)$$

**Définition 2.1.** Let  $H : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_+$  be the function defined, for all  $x \in \Delta$ , by

$$H(x) := \sum_{i,j \in \mathbb{V}: x_{ij} > 0} a_{ij} p_{ij} \frac{x_{ij}^2}{x_i x_j}.$$

We call  $H(x)$  the *expected payoff* at  $x$ .

In this paper we use stochastic approximation techniques, namely we compare the evolution of the random process  $(x_n)$  to the evolution of the deterministic dynamics driven by the mean-field ODE

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad (2.3)$$

where  $F$  is a function from  $\Delta$  to  $T\Delta$ , tangent space of  $\Delta$ , which maps  $x$  to

$$F(x) = \left[ x_{ij} \left( a_{ij} p_{ij} \frac{x_{ij}}{x_i x_j} - H(x) \right) \right]_{i,j \in \mathbb{V}},$$

with the convention that  $F(x)_{ij} = 0$  if  $x_{ij} = 0$ . We will make this link explicit in Section 3.1.

As we will see,  $H$  is a Lyapunov function for the ODE (2.3), which should imply that, up to a small error term, the random process  $(H(x_n))_n$  increases in average. We are indeed able to show the convergence of  $(H(x_n))_n$ , and hence the asymptotic linear growth of  $(T_n)_n$  by conditional Borel-Cantelli Lemma, see Corollary 3.8. The proof is technical, since the function  $H$  is irregular on the boundary of the simplex, so that a simple Taylor expansion does not give enough precision.

**Théorème 2.2.** *The expected payoff process  $(H(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converges almost surely.*

The next Theorem 2.3 shows the convergence of  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  towards the set of equilibria, i.e. the set of points  $x$  such that  $F(x) = 0$ . The equilibria are not isolated in general, and this result does not imply the a.s. convergence of  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , which we could not prove in general.

**Théorème 2.3.** *The random process  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converges to the set of equilibria of the mean-field ODE (2.3) almost surely.*

Our next result provides necessary and sufficient conditions for the stability of equilibria of the ODE.

Let us first define the *boundary* of the simplex as

$$\partial\Delta := \left\{ x \in \Delta : \exists i \in \mathbb{V} \text{ s.t. } x_i = \sum_{j \in \mathbb{V}} x_{ij} = 0 \right\}.$$

Note that  $\partial\Delta$  is not the topological boundary of  $\Delta$ . If  $x_n \rightarrow \partial\Delta$ , then one of the vertices *falls out of use*, in the sense that the frequency of its communications asymptotically goes to zero.

We call  $x \in \Delta \setminus \partial\Delta$  a stable equilibrium of the ODE (2.3) iff the maximum real part of the eigenvalues of its Jacobian matrix at  $x$  is nonpositive, see Definition 5.5. This condition is close to the following one : if the solution of the ODE (2.3) starts near  $x$ , it will remain in its neighbourhood forever (see Section 5 for more detail).

We characterize in Proposition 2.6 the stable equilibria  $x \in \Delta \setminus \partial\Delta$  in terms of a graph structure associated to  $x$ .

Let us first introduce some definitions. For any  $x \in \Delta$ , we define a subgraph  $G_x$  of  $G$ , with adjacency  $\overset{x}{\sim}$ , of possible communications between vertices associated to  $x$ . Then Definition 2.5 will introduce the property corresponding to the stability of equilibria in  $\Delta \setminus \partial\Delta$ .

**Définition 2.4.** *Given  $x \in \Delta$ , let  $G_x$  be the subgraph of  $G$  with vertices in  $\mathbb{V}$  and adjacency  $\overset{x}{\sim}$  such that  $i \overset{x}{\sim} j$  if and only if  $x_{ij} > 0$ , for all  $i, j \in \mathbb{V}$ .*

**Définition 2.5.** *Consider a subgraph  $\mathcal{G}$  of  $G$ , with adjacency  $\overset{\mathcal{G}}{\sim}$ , and let  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_d$  be its connected components. Let  $P_{\mathcal{G}}$  be the following property :*

1.  $\forall m \in \{1, \dots, d\}, i, j, k, l \in \mathcal{C}_m, \text{ s.t. } i \overset{\mathcal{G}}{\sim} j \text{ and } k \overset{\mathcal{G}}{\sim} l, a_{ij}p_{ij} = a_{kl}p_{kl} ;$
2.  $\forall m \in \{1, \dots, d\}, \mathcal{C}_m$  contains at most one vertex with several neighbours ;
3. each vertex has a corresponding edge within  $\mathcal{G}$ .

Condition (1) in Definition 2.4 is a balance condition on the affinities within a connected component, whereas Condition (2) means that each connected component is star-shaped : if  $P_{\mathcal{G}}$  holds, then for each of its connected components, there exists a *nucleus vertex*  $i_0 \in \mathbb{V}$  such that if  $j_1 \overset{\mathcal{G}}{\sim} i_0$  is a *satellite vertex*, then  $j_1 \not\overset{\mathcal{G}}{\sim} i$  for any  $i \neq i_0$ , see Figure 4.2. Finally, Condition (3) applied to  $\mathcal{G} = G_x$  is equivalent to  $x \in \Delta \setminus \partial\Delta$ .

The following result is a consequence of Proposition 5.7.

**Proposition 2.6.** *An equilibrium  $x \in \Delta \setminus \partial\Delta$  is stable if and only if its associated graph  $G_x$  satisfies the property  $P_{G_x}$ .*

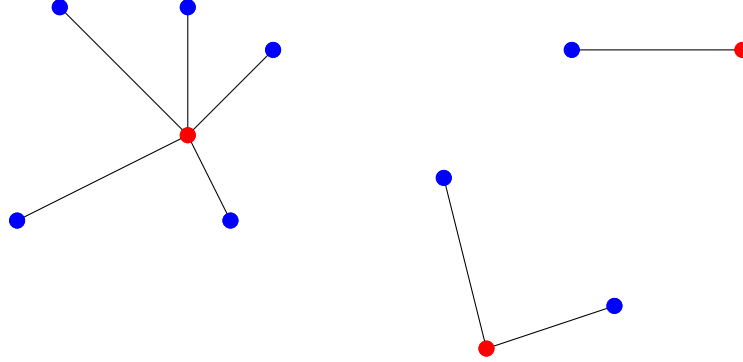


FIGURE 4.2 – Stable configuration composed of three star-shaped connected components

**Remarque 2.7.** *Conversely, it is straightforward that, if  $P_{\mathcal{G}}$  holds, then there exists  $x \in \Delta \setminus \partial\Delta$  such that  $\mathcal{G} = G_x$ .*

Theorem 2.8 implies that any subgraph  $\mathcal{G}$  of  $G$  such that  $P_{\mathcal{G}}$  holds, with positive probability  $x_n$  converges to some  $x \in \Delta \setminus \partial\Delta$  with  $G_x = \mathcal{G}$ ; and  $\mathcal{G}$  is a limit graph in a strong sense, since after a (random) time communications will only occur within edges of this graph.

**Théorème 2.8.** *Let  $q \in \Delta \setminus \partial\Delta$  be a stable equilibrium for the ODE (2.3) associated to the evolution of  $(x_n)$ , and let  $\mathcal{N}(q)$  be a neighbourhood of  $q$  in  $\Delta$ . In particular,  $P_{G_q}$  is verified. We have that, with positive probability,*

1.  $x_n \rightarrow x \in \mathcal{N}(q)$  such that  $G_x = G_q$ .
2.  $\forall i, j \in \mathbb{V}, V_{ij}^\infty = \infty \iff \{i, j\}$  is an edge of  $G_q$ .

Theorems 2.2, 2.3 and 2.8 are generalizations of results of Hu, Skyrms and Tarrès [45], on the case of the so-called Signaling game, see Section 1.

We believe but cannot prove that  $x_n$  converges a.s. to some stable equilibrium in  $\Delta$ . The difficulty arises from the fact that convergence towards  $\partial\Delta$  is also possible : in Proposition 4.2 in Section 4, we provide a network on which several sites a.s. asymptotically fall out of use (i.e.  $x_i^n \rightarrow 0$ ), but each one of them performs infinitely many successful communications. Now the behavior in the neighborhood of  $\partial\Delta$  is difficult to analyse, since the functions  $F$  and  $H$  are not continuous on  $\partial\Delta$ , and since the error in the stochastic approximation can be irregular.

The paper is organized as follows. In the following Section 3.1, we explicit the ODE associated to the dynamics of  $x_n$ , and prove that  $H$  is a Lyapunov function for the deterministic dynamics. Section 3.2 and Section 3.3 are respectively dedicated to the proofs of Theorem 2.2 and Theorem 2.3. Section 4 provides an example of networks

on which the process  $x_n$  converges a.s. to the boundary of the simplex  $\Delta$ . Section 5 is devoted to the classification of equilibria and analysis of stability, and Section 6 concerns the proof of Theorem 2.8.

### 3 Stochastic Approximation

Here, we will compute the conditional increment of the process  $(x_n)$  and derive some mean-field ODE. Using stochastic approximation techniques, we will then study this ODE (in particular its equilibria in Section 5), following the idea that the random process behaves more or less like the solutions of the ODE.

Let us compute the increment of  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  at time  $n$ . For this purpose, let us define, for all  $i, j \in \mathbb{V}$ ,  $i \sim j$ , and for all  $n \in \mathbb{N}$ , the increments

$$\Delta_{ij}^{n+1} := V_{ij}^{n+1} - V_{ij}^n, \quad (3.1)$$

$$\Delta_T^{n+1} := T_{n+1} - T_n. \quad (3.2)$$

Now, for all  $ij \in E$ , we have

$$\begin{aligned} x_{ij}^{n+1} - x_{ij}^n &= \frac{V_{ij}^n + \Delta_{ij}^{n+1}}{T_n + \Delta_T^{n+1}} - \frac{V_{ij}^n}{T_n} \\ &= \frac{T_n \cdot \Delta_{ij}^{n+1} - V_{ij}^n \cdot \Delta_T^{n+1}}{T_n (T_n + \Delta_T^{n+1})} \\ &= \frac{T_n \cdot \Delta_{ij}^{n+1} - V_{ij}^n \cdot \Delta_T^{n+1}}{(T_n)^2} - \frac{\Delta_T^{n+1} (T_n \cdot \Delta_{ij}^{n+1} - V_{ij}^n \cdot \Delta_T^{n+1})}{T_n^2 (T_n + \Delta_T^{n+1})} \\ &= \frac{1}{T_n} (\Delta_{ij}^{n+1} - x_{ij}^n \cdot \Delta_T^{n+1}) - \frac{\Delta_T^{n+1} (\Delta_{ij}^{n+1} - x_{ij}^n \cdot \Delta_T^{n+1})}{T_n (T_n + \Delta_T^{n+1})}. \end{aligned}$$

Let us define  $(\tilde{R}_{n+1}) = (\tilde{R}_{n+1}^{ij})_{i,j \in \mathbb{V}}$  by

$$\tilde{R}_{n+1}^{ij} := \frac{\Delta_T^{n+1} (\Delta_{ij}^{n+1} - x_{ij}^n \cdot \Delta_T^{n+1})}{T_n (T_n + \Delta_T^{n+1})}, \quad (3.3)$$

which is the increment of a bounded and almost surely converging process, as  $0 \leq \Delta_{ij}^{n+1} \leq a_{ij}$ ,  $0 \leq \Delta_T^{n+1} \leq \sum a_{kl}$ , and  $\Delta_T^{n+1} \neq 0$  if and only if  $T_{n+1} - T_n \neq 0$ . Thus

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{R}_{n+1}^{ij}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k,l \in \mathbb{V}} a_{kl}}{T_n^2} \mathbb{1}_{\Delta_T^{n+1} > 0} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k,l \in \mathbb{V}} a_{kl}}{n^2 \min_{k,l \in \mathbb{V}} (a_{kl}, v_{kl}^0)}.$$

## CHAPITRE 4. REINFORCEMENT LEARNING IN SOCIAL NETWORKS, WITH P. TARRÈS

---

Taking the conditional expectation, using (1.1) and (2.2), we have

$$\mathbb{E}(x_{ij}^{n+1} - x_{ij}^n | \mathcal{F}_n) = \frac{x_{ij}^n}{T_n} \left( a_{ij} p_{ij} \frac{x_{ij}^n}{x_i^n x_j^n} - H(x_n) \right) - R_n^{ij},$$

where  $R_n^{ij} := \mathbb{E} \left( \tilde{R}_{n+1}^{ij} | \mathcal{F}_n \right)$ .

Now, let us define a function  $F : \Delta \rightarrow T\Delta$ , tangent space of  $\Delta$ , which maps  $x$  to

$$F(x) = \left[ x_{ij} \left( a_{ij} p_{ij} \frac{x_{ij}}{x_i x_j} - H(x) \right) \right]_{i,j \in \mathbb{V}},$$

with the convention that  $F(x)_{ij} = 0$  if  $x_{ij} = 0$ .

Thus, we have

$$\mathbb{E}(x_{ij}^{n+1} - x_{ij}^n | \mathcal{F}_n) = \frac{1}{T_n} F(x_n)_{ij} - R_n^{ij}, \quad (3.4)$$

where  $R_n^{ij}$  is negligible, in the sense that a.s.  $\sum_n |R_n^{ij}| < \infty$ , using a generalized version of Conditional Borel-Cantelli Lemma, see [23, Lemma 2.7.33]. So, let us consider the following ODE on  $\Delta \setminus \partial\Delta$  :

$$\frac{dx}{dt} = F(x). \quad (3.5)$$

The stochastic approximation approach is justified by the following lemma, where we use the Euclidean norm  $|\cdot|$  of  $\mathbb{R}^{|\mathbb{V}| \times |\mathbb{V}|}$ .

**Lemme 3.1.** *There exists an adapted martingale increment process  $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  such that, for all  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$x_{n+1} - x_n = \frac{F(x_n)}{T_n} + \eta_{n+1} - R_{n+1}, \quad (3.6)$$

and

$$|\eta_{n+1}| \leq 4 \frac{\sum_{i,j \in \mathbb{V}} a_{ij}}{T_n}.$$

*Démonstration.* The fact that  $(\eta_n)$  is a martingale increment process follows immediately from (3.4). Moreover,

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{T_n} \left| V_{n+1} - V_n - \frac{V_{n+1} \times \Delta_T^{n+1}}{T_{n+1}} \right| \leq 2 \frac{\sum_{i,j \in \mathbb{V}} a_{ij}}{T_n}. \quad (3.7)$$

□

Corollary 3.8, which proves asymptotic linear growth of  $T_n$ , will in particular imply that the martingale  $(\sum_{k=1}^n \eta_k)_{n \in \mathbb{N}}$  converges a.s. by Doob's convergence theorem.

Equation (3.6) is called a stochastic approximation of  $(x_n)$ . The two terms  $\eta_{n+1}$  and  $R_n$  are summable hence we neglect them. Then,  $1/T_n$  is the step size and is of the order of  $1/n$  (see Corollary 3.8). When the step size is  $\mathcal{O}(1/n)$ , the process is not obviously converging but we hope that  $F(x_n)$  (that we consider as a derivative) goes to zero fast enough in order to make  $(x_n)$  converge (see for instance Benaïm [13]). For this purpose, we study the evolution of the deterministic process driven by (3.5). In particular, we would like to prove that the random process  $(x_n)$  converges to the set of equilibria of (3.5).

Let  $\Gamma$  be the *set of equilibria* of the ODE (3.5), i.e.

$$\Gamma := \left\{ x \in \Delta : F(x) = 0 \right\}. \quad (3.8)$$

### 3.1 Analysis of the mean-field ODE

In this section, the main goal is to prove that the function  $H$  is a Lyapunov function for the ODE (3.5), meaning that  $H$  is increasing along a path of the ODE. This will help us to show that the random process  $H(x_n)$  is almost a submartingale (see Theorem 2.2). Nevertheless,  $H$  is not continuous on the boundary  $\partial\Delta$ , which prevents us from deriving stochastic results directly from the deterministic statements.

We refer the reader to [45] for a heuristical justification of the fact that  $H$  is a Lyapunov function. Roughly speaking, this gives us the idea that the people in the network learn to communicate as their expected payoff increases as the process evolves.

The proof of the following proposition is quite technical but the computations are straightforward.

Let, for all  $x \in \Delta$ ,

$$p(x) := \sum_{i,j,k \in \mathbb{V}: x_{ij}, x_{ik} > 0} \frac{x_{ij}x_{ik}}{x_i} (y_{ij} - y_{ik})^2, \quad (3.9)$$

where, given  $x \in \Delta \setminus \partial\Delta$ , and  $i, j \in \mathbb{V}$  such that  $i \sim j$ ,

$$y_{ij} := a_{ij}p_{ij} \frac{x_{ij}}{x_i x_j} \quad (3.10)$$

is the weighted *efficiency* of the pair  $ij$ .

**Proposition 3.2.**  *$H$  is a Lyapunov function on  $\Delta \setminus \partial\Delta$  for the mean-field ODE (3.5), more precisely,*

$$\nabla H \cdot F(x) = p(x) \geq 0. \quad (3.11)$$

## CHAPITRE 4. REINFORCEMENT LEARNING IN SOCIAL NETWORKS, WITH P. TARRÈS

**Remark.**  $H$  is not a strict Lyapunov function, i.e.  $\nabla H \cdot F$  does not only vanish on  $\Gamma$ .

*Démonstration.* Let us now differentiate  $H$  along a path of the ODE, with respect to space variables and using the symmetrical notation. We consider  $x_{ij}$  and  $x_{ji}$  as independent in the differentiation. For any  $x \in \Delta \setminus \partial\Delta$ , we have

$$\begin{aligned}
\nabla H \cdot F(x) &= \sum_{i,j \in \mathbb{V}} a_{ij} p_{ij} \left\{ 2 \frac{x_{ij}^2}{x_i x_j} \left( a_{ij} p_{ij} \frac{x_{ij}}{x_i x_j} - H(x) \right) \right. \\
&\quad - \frac{x_{ij}^2}{x_i^2 x_j} \left( \sum_{k \sim i} a_{ik} p_{ik} \frac{x_{ik}^2}{x_i x_k} - x_{ik} H(x) \right) \\
&\quad \left. - \frac{x_{ij}^2}{x_i x_j^2} \left( \sum_{l \sim j} a_{jl} p_{jl} \frac{x_{jl}^2}{x_j x_l} - x_{jl} H(x) \right) \right\} \\
&= 2 \sum_{i,j \in \mathbb{V}} a_{ij}^2 p_{ij}^2 \frac{x_{ij}^3}{(x_i x_j)^2} \\
&\quad - \sum_{i,j,k \in \mathbb{V}} a_{ij} p_{ij} \frac{x_{ij}^2}{x_i^2 x_j} a_{ik} p_{ik} \frac{x_{ik}^2}{x_i x_k} - \sum_{i,j,l \in \mathbb{V}} a_{ij} p_{ij} \frac{x_{ij}^2}{x_i x_j^2} a_{jl} p_{jl} \frac{x_{jl}^2}{x_j x_l} \\
&\quad - H(x) \times \sum_{i,j \in \mathbb{V}} a_{ij} p_{ij} \frac{x_{ij}^2}{x_i x_j} \left( 2 - \frac{1}{x_i} \sum_{k \sim i} x_{ik} - \frac{1}{x_j} \sum_{l \sim j} x_{jl} \right) \\
&= 2 \sum_{i,j \in \mathbb{V}} a_{ij}^2 p_{ij}^2 \frac{x_{ij}^3}{(x_i x_j)^2} - 2 \sum_{i,j,k \in \mathbb{V}} a_{ij} p_{ij} a_{ik} p_{ik} \frac{x_{ij}^2 x_{ik}^2}{x_i^3 x_j x_k} \\
&= \sum_{i,j,k \in \mathbb{V}} a_{ij}^2 p_{ij}^2 \frac{x_{ij}^3 x_{ik}}{x_i^3 x_j^2} + \sum_{i,j,k \in \mathbb{V}} a_{ik}^2 p_{ik}^2 \frac{x_{ik}^3 x_{ij}}{x_i^3 x_k^2} \\
&\quad - \sum_{i,j,k \in \mathbb{V}} 2 a_{ij} p_{ij} a_{ik} p_{ik} \frac{x_{ij}^2 x_{ik}^2}{x_i^3 x_j x_k} \\
&= \sum_{i,j,k \in \mathbb{V}} \frac{x_{ij} x_{ik}}{x_i} \left[ a_{ij} p_{ij} \frac{x_{ij}}{x_i x_j} - a_{ik} p_{ik} \frac{x_{ik}}{x_i x_k} \right]^2 \\
&= p(x) \geq 0.
\end{aligned}$$

We used, in the third equality, that  $\sum_{k \sim i} x_{ik} = x_i$  (and the same equality with  $j$  instead of  $i$ ), and we also used the symmetrical notations, switching labels of  $i$  and  $j$  (resp.  $k$  and  $l$ ). In the last equality, recall the definition (3.10) of  $y_{ij}$ . □

Given  $x \in \Delta \setminus \partial\Delta$ , and  $i, j \in \mathbb{V}$  such that  $i \sim j$ , let

$$N_i(x) := \sum_{k \in \mathbb{V}} \frac{x_{ik}}{x_i} \cdot y_{ik} \tag{3.12}$$



be the *weighted efficiency*  $N_i(x)$  of  $i$ .

**Lemme 3.3.** *For any  $x \in \Delta \setminus \partial\Delta$  :*

$$p(x) = \nabla H \cdot F(x) = 2 \sum_{i,j \in \mathbb{V}} x_{ij} \left( y_{ij} - N_i(x) \right)^2. \quad (3.13)$$

**Remark.** In the context of communication systems, the above two formulas (3.11), (3.13) mean that the growth rate of the expected payoff is a function depending on the difference between efficiencies of different strategy pairs.

*Démonstration.* Fix  $i, j \in \mathbb{V}$  such that  $i \sim j$ , and define a random variable  $Y$  under the measure  $\mathbb{P}_i$  such that, for all  $k \in \mathbb{V}$ ,  $\mathbb{P}_i(Y = y_{ik}) := \frac{x_{ik}}{x_i}$ . We denote  $\mathbb{E}_i$  the expectation associated with  $\mathbb{P}_i$ . Recalling (3.12), we have

$$\mathbb{E}_i(Y) = N_i(x).$$

This implies that

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i \left[ \left( y_{ij} - Y \right)^2 \right] &= \left( y_{ij} - N_i(x) \right)^2 + \mathbb{E}_i \left[ \left( Y - N_i(x) \right)^2 \right] \\ &= \left( y_{ij} - N_i(x) \right)^2 + \sum_k \frac{x_{ik}}{x_i} \left( N_i(x) - y_{ik} \right)^2. \end{aligned}$$

On the other hand,

$$\mathbb{E}_i \left[ \left( y_{ij} - Y \right)^2 \right] = \sum_k \frac{x_{ik}}{x_i} (y_{ij} - y_{ik})^2.$$

Therefore, for any  $x \in \Delta \setminus \partial\Delta$ ,

$$\begin{aligned} \nabla H \cdot F(x) &= \sum_{i,j,k \in \mathbb{V}} \frac{x_{ij}x_{ik}}{x_i} \left[ y_{ij} - y_{ik} \right]^2 \\ &= \sum_{i,j \in \mathbb{V}} x_{ij} \sum_k \frac{x_{ik}}{x_i} \left[ y_{ij} - y_{ik} \right]^2 \\ &= \sum_{i,j \in \mathbb{V}} x_{ij} \left( y_{ij} - N_i(x) \right)^2 + \sum_{i,j,k \in \mathbb{V}} \frac{x_{ij}x_{ik}}{x_i} \left( N_i(x) - y_{ik} \right)^2 \\ &= 2 \sum_{i,j \in \mathbb{V}} x_{ij} \left( y_{ij} - N_i(x) \right)^2, \end{aligned}$$

switching labels of  $k$  and  $j$  on the last sum of the penultimate line. □

## CHAPITRE 4. REINFORCEMENT LEARNING IN SOCIAL NETWORKS, WITH P. TARRÈS

---

Now, recall that  $a_{ij} > 0$ , and thus  $p_{ij} > 0$ , if and only if  $ij \in E$  (i.e.  $i \sim j$ ). Let us define the lower bounds

$$a_{\min} = \min \{a_{ij}, v_{ij}^0 : ij \in E\} \text{ and } p_{\min} = \min \{p_{ij} : ij \in E\}.$$

Recall also that if  $x_{ij} > 0$ , for some  $x \in \Delta$ , then  $ij \in E$ .

**Lemme 3.4.** *For all  $x \in \Delta \setminus \partial\Delta$  and  $i \in \mathbb{V}$ ,  $N_i(x) \geq a_{\min}p_{\min}$ .*

*Démonstration.* Using that  $\sum_{j \in \mathbb{V}} x_j = 1$ , we have by Cauchy-Schwarz inequality

$$N_i(x) = \left( \sum_{j \in \mathbb{V}} a_{ij} p_{ij} \frac{x_{ij}^2}{x_i^2 x_j} \right) \sum_{j \in \mathbb{V}} x_j \geq a_{\min} p_{\min} \left( \sum_{j \in \mathbb{V}} \frac{x_{ij}}{x_i} \right)^2 = a_{\min} p_{\min}.$$

□

Let us define

$$\Lambda := \{x \in \Delta : p(x) = 0\}, \quad (3.14)$$

where  $p$ , defined in (3.9), is the derivative of  $H$  along a trajectory of the ODE (3.5). The proof of the following Lemma 3.5 is straightforward.

**Lemme 3.5.**  *$x \in \Lambda$  if and only if*

$$a_{ij} p_{ij} \frac{x_{ij}}{x_j} = a_{ik} p_{ik} \frac{x_{ik}}{x_k}, \text{ for all } i, j, k \in \mathbb{V} \text{ s.t. } x_{ij} \neq 0, x_{ik} \neq 0$$

*or, equivalently,*

$$y_{ij} = y_{ik}, \text{ for all } i, j, k \in \mathbb{V} \text{ s.t. } x_{ij} \neq 0, x_{ik} \neq 0.$$

**Remarque 3.6.** *Lemma 3.5 helps us to characterize the graphs of the points where the derivative of  $H$  vanishes (i.e. points where  $H$  reaches a maximum along the trajectories). Recall Definition 2.4 of  $(G_x, \approx)$ . If  $x \in \Lambda$ , then, for all  $i, j, k, l \in G_x$  in the same connected component and such that  $i \approx j$  and  $k \approx l$ , the equality  $y_{ij} = y_{kl}$  holds.*

*On the other hand, we are interested on the set of rest points  $\Gamma$  : if  $x \in \Gamma$ , then, for all  $i, j \in G_x$  such that  $i \approx j$ , we obtain  $y_{ij} = H(x)$ . Hence, we have  $\Gamma \subseteq \Lambda$  but  $\Lambda \neq \Gamma$ . This is equivalent to say that  $H$  is not a strict Lyapunov function. This is why we have to prove separately the convergence to  $\Lambda$  and the convergence to  $\Gamma$ .*

### 3.2 Proof of Theorem 2.2 and asymptotic linear growth of $(T_n)$

*Proof of Theorem 2.2.* Let us compute the conditional expectation of the increment of  $(H(x_n))$ , that we want to interpret as  $\nabla H \cdot F(x)$ . Thus, this calculation will be inspired by the one of  $\nabla H \cdot F(x)$ . More precisely, we want to obtain :

$$\mathbb{E}(H(x_{n+1}) - H(x_n) | \mathcal{F}_n) = \frac{1}{T_n} p(x_n) + \mathbb{E}(\xi_{n+1} - \xi_n | \mathcal{F}_n), \quad (3.15)$$

where  $(\xi_n)$  is a bounded converging process. This will imply that  $(H(x_n) - \xi_n)$  is a submartingale. Moreover, it is a bounded process, as  $(\xi_n)$  is bounded and, for any  $x \in \Delta$ ,  $0 \leq H(x) \leq |\mathbb{V}| \max_{i,j \in \mathbb{V}} (a_{ij} p_{ij})$ , which will enable to conclude the proof.

Recall that

$$H(x_n) = \sum_{i,j \in \mathbb{V}} a_{ij} p_{ij} \frac{(V_{ij}^n)^2}{V_i^n V_j^n}.$$

Recall also (3.1) and define  $\Delta_i^{n+1} := \sum_j \Delta_{ij}^{n+1}$ , for all  $i \in \mathbb{V}$  and  $n \in \mathbb{N}$ .

Now, let us compute the increment of  $H(x_n)$ . For all  $i, j \in \mathbb{V}$ ,  $i \sim j$ , we have

$$\begin{aligned} \frac{(V_{ij}^{n+1})^2}{V_i^{n+1} V_j^{n+1}} - \frac{(V_{ij}^n)^2}{V_i^n V_j^n} &= \frac{(V_{ij}^n + \Delta_{ij}^{n+1})^2}{(V_i^n + \Delta_i^{n+1})(V_j^n + \Delta_j^{n+1})} - \frac{(V_{ij}^n)^2}{V_i^n V_j^n} \\ &= \frac{2V_{ij}^n V_i^n V_j^n \Delta_{ij}^{n+1} - (V_{ij}^n)^2 V_i^n \Delta_j^{n+1} - (V_{ij}^n)^2 V_j^n \Delta_i^{n+1}}{(V_i^n V_j^n)^2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$+ \xi_{n+1}^{ij} - \xi_n^{ij}, \quad (3.17)$$

where  $(\xi_n^{ij})$  is a process defined by  $\xi_0^{ij} = 0$ , and, for all  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \xi_{n+1}^{ij} - \xi_n^{ij} &= \frac{2V_{ij}^n V_i^n V_j^n \Delta_{ij}^{n+1} - (V_{ij}^n)^2 V_i^n \Delta_j^{n+1} - (V_{ij}^n)^2 V_j^n \Delta_i^{n+1}}{V_i^n V_j^n (V_i^n + \Delta_i^{n+1})(V_j^n + \Delta_j^{n+1})} \\ &\quad - \frac{2V_{ij}^n V_i^n V_j^n \Delta_{ij}^{n+1} - (V_{ij}^n)^2 V_i^n \Delta_j^{n+1} - (V_{ij}^n)^2 V_j^n \Delta_i^{n+1}}{(V_i^n V_j^n)^2} \\ &\quad + \frac{V_i^n V_j^n (\Delta_{ij}^{n+1})^2 - (V_{ij}^n)^2 \Delta_i^{n+1} \Delta_j^{n+1}}{V_i^n V_j^n (V_i^n + \Delta_i^{n+1})(V_j^n + \Delta_j^{n+1})}. \end{aligned}$$

Then, define

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}^1 &:= -2V_{ij}^n \Delta_{ij}^{n+1} \left( \frac{1}{(V_i^n + \Delta_i^{n+1})(V_j^n + \Delta_j^{n+1})} - \frac{1}{V_i^n V_j^n} \right); \\ \alpha_{n+1}^2 &:= - \left( \frac{(V_{ij}^n)^2 \Delta_j^{n+1}}{V_j^n} + \frac{(V_{ij}^n)^2 \Delta_i^{n+1}}{V_i^n} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( \frac{1}{(V_i^n + \Delta_i^{n+1})(V_j^n + \Delta_j^{n+1})} - \frac{1}{V_i^n V_j^n} \right); \\ \alpha_{n+1}^3 &:= \frac{(\Delta_{ij}^{n+1})^2}{(V_i^n + \Delta_i^{n+1})(V_j^n + \Delta_j^{n+1})}; \\ \alpha_{n+1}^4 &:= \frac{(V_{ij}^n)^2 \Delta_i^{n+1} \Delta_j^{n+1}}{V_i^n V_j^n (V_i^n + \Delta_i^{n+1})(V_j^n + \Delta_j^{n+1})}, \end{aligned}$$

So that  $\xi_{n+1}^{ij} - \xi_n^{ij} = -\alpha_{n+1}^1 + \alpha_{n+1}^2 + \alpha_{n+1}^3 - \alpha_{n+1}^4$ , where  $\alpha_{n+1}^i \geq 0$ , for all  $i \in \{1, \dots, 4\}$  and for all  $n \in \mathbb{N}$ .

First, we have

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \alpha_n^3 &= \sum_{n \geq 0} \frac{(\Delta_{ij}^{n+1})^2}{(V_i^n + \Delta_i^{n+1})(V_j^n + \Delta_j^{n+1})} \leq \sum_{n \geq 0} \frac{a_{ij}^2}{(V_{ij}^{n+1})^2} \mathbf{1}_{\Delta_{ij}^{n+1} > 0} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}, \\ \sum_{n \geq 0} \alpha_{n+1}^4 &\leq \sum_{n \geq 0} \frac{(\sum_{k,l \in \mathbb{V}} a_{kl})^2}{(V_i^n)^2} \mathbf{1}_{\Delta_i^{n+1} > 0} \leq \frac{(\sum_{k,l \in \mathbb{V}} a_{kl})^2}{a_{\min}^2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Besides, using that

$$\begin{aligned} \frac{1}{(V_i^n + \Delta_i^{n+1})(V_j^n + \Delta_j^{n+1})} - \frac{1}{V_i^n V_j^n} &= -\frac{V_j^n \Delta_i^{n+1} + V_i^n \Delta_j^{n+1} + \Delta_i^{n+1} \Delta_j^{n+1}}{V_i^n V_j^n (V_i^n + \Delta_i^{n+1})(V_j^n + \Delta_j^{n+1})} \\ &\geq -\left( \frac{\Delta_i^{n+1}}{(V_i^n)^2 V_j^n} + \frac{\Delta_j^{n+1}}{V_i^n (V_j^n)^2} + \frac{\Delta_i^{n+1} \Delta_j^{n+1}}{(V_i^n)^2 (V_j^n)^2} \right), \end{aligned}$$

we get

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \alpha_{n+1}^1 &\leq 6 \frac{(\min \{1, \sum_{k,l \in \mathbb{V}} a_{kl}\})^3}{a_{\min}^3 \wedge 1} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}, \\ \sum_{n \geq 1} \alpha_{n+1}^2 &\leq 6 \frac{(\min \{1, \sum_{k,l \in \mathbb{V}} a_{kl}\})^3}{a_{\min}^3 \wedge 1} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Hence,  $\sum_{n \geq 1} \alpha_n^i < C$ , for some finite constant  $C > 0$ , where  $\alpha_{n+1}^i \geq 0$  for all  $n \in \mathbb{N}$  and for all  $i \in \{1, \dots, 4\}$ .

Therefore, for all  $i, j \in \mathbb{V}$ ,  $(\xi_n^{ij})$  is a converging bounded process, and so is  $(\xi_n)$  defined by  $\xi_n := \sum_{i,j} \xi_n^{ij}$ .

Summing over  $i$  and  $j$  the lines (3.16) and (3.17), and using symmetry of the notation, we have

$$H(x_{n+1}) - H(x_n) = (\xi_{n+1} - \xi_n)$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sum_{i,j \in \mathbb{V}} a_{ij} p_{ij} \frac{V_{ij}^n \Delta_{ij}^{n+1}}{V_i^n V_j^n} - 2 \sum_{i,j \in \mathbb{V}} a_{ij} p_{ij} \frac{(V_{ij}^n)^2 \Delta_i^{n+1}}{(V_i^n)^2 V_j^n} \\
&= \sum_{i,j,k \in \mathbb{V}} a_{ij} p_{ij} \frac{V_{ij}^n V_{ik}^n}{(V_i^n)^2 V_j^n} \Delta_{ij}^{n+1} + \sum_{i,j,k \in \mathbb{V}} a_{ik} p_{ik} \frac{V_{ik}^n V_{ij}^n}{(V_i^n)^2 V_k^n} \Delta_{ik}^{n+1} \\
&\quad - 2 \sum_{i,j,k \in \mathbb{V}} a_{ij} p_{ij} \frac{(V_{ij}^n)^2}{(V_i^n)^2 V_j^n} \Delta_{ik}^{n+1}.
\end{aligned}$$

Recall that  $\mathbb{E}(\Delta_{ik}^{n+1} | \mathcal{F}_n) = a_{ik} p_{ik} \frac{(x_{ik}^n)^2}{x_i^n x_k^n}$ , for all  $i, k \in \mathbb{V}$ . Finally, taking the conditional expectation, we obtain

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[ H(x_{n+1}) - H(x_n) - (\xi_{n+1} - \xi_n) \middle| \mathcal{F}_n \right] \\
&= \sum_{i,j,k \in \mathbb{V}} \frac{V_{ij}^n V_{ik}^n}{V_i^n} \left[ \left( a_{ij} p_{ij} \frac{V_{ij}^n}{V_i^n V_j^n} \right)^2 + \left( a_{ik} p_{ik} \frac{V_{ik}^n}{V_i^n V_k^n} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - 2 a_{ij} p_{ij} a_{ik} p_{ik} \frac{V_{ij}^n V_{ik}^n}{(V_i^n V_j^n)^2} \right] \\
&= \frac{1}{T_n} \sum_{i,j,k \in \mathbb{V}} \frac{x_{ij}^n x_{ik}^n}{x_i^n} \left[ a_{ij} p_{ij} \frac{x_{ij}^n}{x_i^n x_j^n} - a_{ik} p_{ik} \frac{x_{ik}^n}{x_i^n x_k^n} \right]^2 = \frac{1}{T_n} p(x_n),
\end{aligned}$$

where  $p$  is defined in (3.9).  $\square$

We have proved that the expected payoff process converges almost surely. We can now prove that the process  $(x_n)$  converges to  $\Lambda$ , defined in (3.14).

**Proposition 3.7.**  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converges a.s. to  $\Lambda$ . More precisely,  $(p(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converges to 0 a.s.

Define for all  $\varepsilon > 0$  the set

$$\Delta_\varepsilon := \{x \in \Delta \setminus \partial\Delta : p(x) > \varepsilon\}. \quad (3.18)$$

*Démonstration.* This argument is similar to the proof of convergence to the set of equilibria in [2]. We have proved that  $(H(x_n) - \xi_n)$  is a bounded submartingale. Thanks to Doob's decomposition, we write it as the sum of a martingale  $(M_n)$  and an increasing predictable process  $(A_n)$ . For all  $n \in \mathbb{N}$ , we have :

$$H(x_n) - \xi_n = M_n + A_n.$$

$(M_n)$  is an upper-bounded martingale, hence a.s. converges. Using (3.15), we deduce

$$A_{n+1} - A_n = \mathbb{E} \left[ (H(x_{n+1}) - \xi_{n+1}) - (H(x_n) - \xi_n) \middle| \mathcal{F}_n \right]$$

## CHAPITRE 4. REINFORCEMENT LEARNING IN SOCIAL NETWORKS, WITH P. TARRÈS

---

$$= \frac{1}{T_n} p(x_n).$$

Then, fix  $\varepsilon > 0$  and define  $\delta > 0$  the distance between the sets  $\Delta_\varepsilon$  and  $\Delta_{\varepsilon/2}^c$ . Assume that  $x_n \in \Delta_\varepsilon$ ,  $x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1} \in \Delta_{\varepsilon/2} \cap \Delta_\varepsilon^c$ ,  $x_{n+k} \in \Delta_{\varepsilon/2}^c$ , then :

$$A_{n+k} - A_n = \sum_{r=n}^{n+k-1} \frac{p(x_r)}{T_r} \geq \varepsilon \sum_{r=n}^{n+k-1} \frac{1}{2T_r}.$$

Therefore,

$$\delta \leq \sum_{r=n}^{n+k-1} |x_{r+1} - x_r| \leq \sum_{r=n}^{n+k-1} \frac{2}{T_r} \leq \frac{4}{\varepsilon} (A_{n+k} - A_n).$$

Then, if  $(x_n)$  were infinitely often away from  $\Lambda$ ,  $A_n$ , and consequently  $H(x_n)$ , would explode. This implies the conclusion.  $\square$

We end this section by stating a result that implies that the process  $(T_n)$  has a linear asymptotic growth.

**Corollaire 3.8.** *Almost surely,*

$$\frac{T_n}{n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} H(x_n) \in \left[ a_{\min} p_{\min}, \sum_{i,j \in \mathbb{V}} a_{ij} p_{ij} \right] \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

*Démonstration.* Using that  $\sum_i x_i = 1$ , definition (3.12) and Lemma 3.4

$$H(x) = \sum_{i \in \mathbb{V}} x_i N_i(x) \geq a_{\min} p_{\min},$$

which gives us the lower bound on  $H$ . The upper bound is trivial.

Recall that

$$\mathbb{E}(T_{n+1} - T_n | \mathcal{F}_n) = H(x_n).$$

Now, the result is a direct consequence of Theorem 2.2 and a generalized version of Conditional Borel-Cantelli Lemma, see [23, Lemma 2.7.33].  $\square$

### 3.3 Proof of Theorem 2.3

In the previous section, we proved that the occupation measure  $(x_n)$  converges a.s. to the set  $\Lambda$ , which is the set of points where the derivative of the Lyapunov function  $H$  vanishes. As we already mentioned in Remark 3.6,  $H$  is not a strict Lyapunov function, i.e.  $\Gamma \subseteq \Lambda$  but  $\Gamma \neq \Lambda$ , where  $\Gamma$  is the set of equilibria of the ODE (3.5), defined in (3.8).

Now, let us prove that the occupation measure converges a.s. to the set of equilibria of the ODE (3.5).

Recall that we have previously defined in (3.18) the set  $\Delta_\varepsilon$ , for all  $\varepsilon > 0$ .

**Lemme 3.9.** Assume that  $\varepsilon > 0$  is small enough, and  $x \in \Delta_{\varepsilon^4}^c$ . Then, for all vertices  $i$  and  $j$ ,  $i \sim j$ , such that  $x_{ij} > \varepsilon$ , we have :

$$|y_{ij} - N_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ and } |y_{ij} - N_j(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

*Démonstration.* Follows directly from Lemma 3.3.  $\square$

Define the constant :

$$c_0 := 12 \left( 1 \vee \left( \sum_{k,l} a_{kl} \right)^3 \right). \quad (3.19)$$

**Lemme 3.10.** For all  $i$  and  $j$  such that  $i \sim j$ , the increment of  $(y_{ij}^n)_n$  can be written :

$$y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n = \frac{1}{T_n} y_{ij}^n \left( y_{ij}^n - N_i(x_n) - N_j(x_n) + H(x_n) \right) + r_{ij}^{n+1} + \zeta_{ij}^{n+1},$$

where  $(r_{ij}^n)$  is predictable,  $\mathbb{E}(\zeta_{ij}^{n+1} | \mathcal{F}_n) = 0$  and

$$|\zeta_{ij}^{n+1}| \leq \frac{c_0}{T_n x_i^n x_j^n}, \text{ and } |r_{ij}^{n+1}| \leq \frac{c_0}{(T_n x_i^n x_j^n)^2}.$$

*Démonstration.* Let us reuse the notation  $y_{ij}^n = a_{ij} p_{ij} V_{ij}^n / (V_i^n V_j^n)$ . We compute

$$\begin{aligned} y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n &= a_{ij} p_{ij} \frac{T_{n+1} V_{ij}^{n+1}}{V_i^{n+1} V_j^{n+1}} - a_{ij} p_{ij} \frac{T_n V_{ij}^n}{V_i^n V_j^n} \\ &= (T_{n+1} a_{ij} p_{ij} V_{ij}^{n+1} V_i^n V_j^n - T_n a_{ij} p_{ij} V_{ij}^n V_i^{n+1} V_j^{n+1}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\times \frac{1}{(V_i^n V_j^n)^2} \left( 1 + \left( \frac{V_i^n V_j^n}{V_i^{n+1} V_j^{n+1}} - 1 \right) \right). \quad (3.21)$$

Recall that

$$\Delta_{ij}^{n+1} = V_{ij}^{n+1} - V_{ij}^n, \Delta_i^{n+1} = V_i^{n+1} - V_i^n, \text{ and } \Delta_T^{n+1} = T_{n+1} - T_n,$$

and define, using (3.20),

$$A_{n+1} := T_{n+1} a_{ij} p_{ij} V_{ij}^{n+1} V_i^n V_j^n - T_n a_{ij} p_{ij} V_{ij}^n V_i^{n+1} V_j^{n+1}.$$

We have

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= a_{ij} p_{ij} V_{ij}^n V_i^n V_j^n \Delta_T^{n+1} + T_n a_{ij} p_{ij} V_i^n V_j^n \Delta_{ij}^{n+1} \\ &\quad - T_n a_{ij} p_{ij} V_{ij}^n V_j^n \Delta_i^{n+1} - T_n a_{ij} p_{ij} V_{ij}^n V_i^n \Delta_j^{n+1} \\ &\quad + a_{ij} p_{ij} V_i^n V_j^n \Delta_T^{n+1} \Delta_{ij}^{n+1} - T_n a_{ij} p_{ij} V_{ij}^n \Delta_i^{n+1} \Delta_j^{n+1}. \end{aligned}$$

## CHAPITRE 4. REINFORCEMENT LEARNING IN SOCIAL NETWORKS, WITH P. TARRÈS

---

Hence

$$|A_{n+1}| \leq \frac{c_0}{2} T_n V_i^n V_j^n,$$

and, recalling the definition (3.12) of  $N_i(x)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \frac{A_{n+1}}{(V_i^n V_j^n)^2} \middle| \mathcal{F}_n \right] &= \frac{1}{T_n} y_{ij}^n (H(x_n) + y_{ij}^n - N_i(x_n) - N_j(x_n)) \\ &\quad + \frac{a_{ij} p_{ij}}{T_n^2 x_i^n x_j^n} \left( \mathbb{E}(\Delta_T^{n+1} \Delta_{ij}^{n+1} \middle| \mathcal{F}_n) - \frac{x_{ij}^n}{x_i^n x_j^n} \mathbb{E}(\Delta_i^{n+1} \Delta_j^{n+1} \middle| \mathcal{F}_n) \right). \end{aligned}$$

Define

$$\begin{aligned} r_{ij}^{n+1} &:= \mathbb{E} \left[ \frac{A_{n+1}}{(V_i^n V_j^n)^2} \left( \frac{V_i^n V_j^n}{V_i^{n+1} V_j^{n+1}} - 1 \right) \middle| \mathcal{F}_n \right] \\ &\quad + \frac{a_{ij} p_{ij}}{T_n^2 x_i^n x_j^n} \left( \mathbb{E}(\Delta_T^{n+1} \Delta_{ij}^{n+1} \middle| \mathcal{F}_n) - \frac{x_{ij}^n}{x_i^n x_j^n} \mathbb{E}(\Delta_i^{n+1} \Delta_j^{n+1} \middle| \mathcal{F}_n) \right), \end{aligned}$$

so that

$$\mathbb{E}(y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n \middle| \mathcal{F}_n) = \frac{1}{T_n} y_{ij}^n (H(x_n) + y_{ij}^n - N_i(x_n) - N_j(x_n)) + r_{ij}^{n+1}.$$

Now

$$1 - \frac{V_i^n V_j^n}{V_i^{n+1} V_j^{n+1}} \leq \frac{1}{V_i^n} + \frac{1}{V_j^n},$$

then we have :

$$|r_{ij}^{n+1}| \leq \frac{c_0(x_i^n + x_j^n)}{2(T_n x_i^n x_j^n)^2} + \frac{c_0}{6(T_n x_i^n x_j^n)^2} \leq \frac{2c_0}{3(T_n x_i^n x_j^n)^2}.$$

Now, notice that

$$|y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n| = \frac{|A_{n+1}|}{V_i^n V_j^n V_i^{n+1} V_j^{n+1}} \leq \frac{6a_{ij} p_{ij}}{T_n x_i^n x_j^n} \left( \sum_{k,l \in \mathbb{V}} a_{kl} \right). \quad (3.22)$$

Hence, defining

$$\zeta_{ij}^{n+1} = y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n - \mathbb{E}(y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n \middle| \mathcal{F}_n),$$

we conclude that

$$|\zeta_{ij}^{n+1}| \leq \frac{c_0}{T_n x_i^n x_j^n}.$$

□



Define

$$\begin{aligned} U_{ij}(\varepsilon) &:= \left\{ x \in \Delta : x_{ij} < \varepsilon \text{ or } y_{ij} - H(x) \geq -\varepsilon \right\}, \\ c_1 &:= \frac{1}{4 \sum_{k,l \in \mathbb{V}} a_{kl} p_{kl}}, \\ c_2 &:= \frac{a_{\min} p_{\min}}{12 \left( \sum_{k,l \in \mathbb{V}} a_{kl} p_{kl} \vee 1 \right)}, \end{aligned}$$

and recall the definition (3.18) of  $\Delta_\varepsilon$ .

**Lemme 3.11.** *Assume that  $\varepsilon > 0$  is small enough and  $m_0 \in \mathbb{N}$  is large enough. For all  $i$  and  $j$  such that  $i \sim j$ , and for all  $n \geq m_0$ , let*

$$\begin{aligned} R_n &:= \sum_{m=m_0}^n \left( y_{ij}^m - y_{ij}^{m-1} - c_2 \frac{\varepsilon^2}{m} \right) \mathbf{1}_{\{x_{m-1} \notin U_{ij}(\varepsilon) \cup \Delta_{\varepsilon^4}, a_{\min} p_{\min} (m-1)/2 \leq T_{m-1} \leq (m-1)/(2c_1)\}}; \\ S_n &:= \sum_{m=m_0}^n \left( x_{ij}^m - x_{ij}^{m-1} + c_1 \frac{\varepsilon^2}{m} \right) \mathbf{1}_{\{x_{m-1} \notin U_{ij}(\varepsilon) \cup \Delta_{\varepsilon^4}, a_{\min} p_{\min} (m-1)/2 \leq T_{m-1} \leq (m-1)/(2c_1)\}}. \end{aligned}$$

Then

1.  $(R_n)_n$  (resp.  $(S_n)_n$ ) is a submartingale (resp. supermartingale);
2.  $\limsup_{n \geq m, m \rightarrow \infty} (R_n - R_m)^- = \limsup_{n \geq m, m \rightarrow \infty} (S_n - S_m)^+ = 0$ .

*Démonstration.* First, if

$$\frac{a_{\min} p_{\min}}{2} \leq \frac{T_n}{n} \leq 2 \sum_{k,l \in \mathbb{V}} a_{kl} p_{kl} = \frac{1}{2c_1}, \quad (3.23)$$

then

$$R_n^{ij} = \mathbb{E} \left( \tilde{R}_n^{ij} \middle| \mathcal{F}_n \right) \geq -\mathbb{E} \left( \frac{(\Delta_T^{n+1})^2}{T_n^2} \middle| \mathcal{F}_n \right) \geq -4 \frac{(\sum_{k,l \in \mathbb{V}} a_{kl})^2}{(a_{\min} p_{\min})^2} \times \frac{1}{n^2},$$

where  $R_n^{ij}$ , defined in (3.3), is the expected increment of a bounded converging process.

Consequently, if (3.23) holds and  $x_n \notin U_{ij}(\varepsilon)$ , we have, by (3.4), as soon as  $n$  is large enough

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x_{ij}^{n+1} - x_{ij}^n | \mathcal{F}_n) &= \frac{x_{ij}^n}{T_n} (y_{ij}^n - H(x_n)) - R_n^{ij} \\ &\leq -\frac{\varepsilon^2}{T_n} - R_n^{ij} \leq -c_1 \frac{\varepsilon^2}{n}, \end{aligned}$$

which implies that  $(S_n)$  is a supermartingale. Besides, (3.23) holds as soon as  $n$  is large enough (random), by Corollary 3.8.

## CHAPITRE 4. REINFORCEMENT LEARNING IN SOCIAL NETWORKS, WITH P. TARRÈS

---

Now, assume  $\varepsilon > 0$  is small enough and  $x_n \notin U_{ij}(\varepsilon) \cup \Delta_{\varepsilon^4}$ . Then, Lemma 3.9 implies that

$$y_{ij}^n - N_i(x_n) - N_j(x_n) + H(x_n) \geq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Hence, if (3.23) holds

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n | \mathcal{F}_n) &\geq \frac{1}{T_n x_i^n x_j^n} \left( \frac{a_{ij} p_{ij} x_{ij}^n \varepsilon}{3} - \frac{c_0}{T_n x_i^n x_j^n} \right) \\ &\geq \frac{1}{T_n x_i^n x_j^n} \left( \frac{a_{ij} p_{ij} x_{ij}^n \varepsilon}{3} - \frac{c_0}{T_n \varepsilon^2} \right) \\ &\geq \frac{1}{T_n x_i^n x_j^n} \left( \frac{a_{ij} p_{ij} \varepsilon^2}{6} \right) \geq c_2 \frac{\varepsilon^2}{n}, \end{aligned}$$

as soon as  $n \geq \mathbf{Cst}((a_{kl}, p_{kl})_{k,l}, \varepsilon, c_0)$ . This concludes the proof of (1).

In order to prove (2), let

$$\begin{aligned} \Pi_n &:= R_n - \sum_{m=m_0}^n \mathbb{E}[R_m - R_{m-1} | \mathcal{F}_n], \\ \Xi_n &:= S_n - \sum_{m=m_0}^n \mathbb{E}[S_m - S_{m-1} | \mathcal{F}_n]. \end{aligned}$$

By Lemma 3.10, we have for all  $n \geq m_0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\Pi_{n+1} - \Pi_n)^2 | \mathcal{F}_n] &\leq \mathbb{E}\left[\left(\zeta_{ij}^{n+1}\right)^2 \mathbb{1}_{\{x_n \notin U_{ij}(\varepsilon) \cup \Delta_{\varepsilon^4}, a_{\min} p_{\min} n/2 \leq T_n \leq n/(2c_1)\}} \middle| \mathcal{F}_n\right] \\ &\leq \frac{c_0^2}{(T_n x_i^n x_j^n)^2} \mathbb{1}_{\{x_n \notin U_{ij}(\varepsilon) \cup \Delta_{\varepsilon^4}, a_{\min} p_{\min} n/2 \leq T_n \leq n/(2c_1)\}} \\ &\leq \frac{4c_0^2}{n^2 a_{\min}^2 p_{\min}^2 \varepsilon^4}. \end{aligned}$$

Therefore,  $(\Pi_n)_n$  is bounded in  $\mathbb{L}^2$  and hence converges. We conclude for  $(\Xi_n)_n$  with similar computations.  $\square$

**Lemme 3.12.** *Let  $\varepsilon > 0$ , and assume  $n \in \mathbb{N}$  is sufficiently large (depending on  $\varepsilon$ ). If  $x_n \in U_{ij}(\varepsilon)$ ,  $|H(x_{n+1}) - H(x_n)| < \varepsilon/2$  and  $T_n \geq n a_{\min} p_{\min}/2$ , then  $x_{n+1} \in U_{ij}(2\varepsilon)$ .*

*Démonstration.* Let  $x_n \in U_{ij}(\varepsilon)$ . We consider  $i$  and  $j$  s.t.  $i \sim j$ . We have

$$|x_{ij}^{n+1} - x_{ij}^n| \leq \frac{2 \sum_{k,l \in \mathbb{V}} a_{kl}}{T_n} \leq \frac{4 \sum_{k,l \in \mathbb{V}} a_{kl}}{n a_{\min} p_{\min}}.$$

If  $x_{ij}^n \leq \varepsilon$ , then  $x_{ij}^{n+1} \leq 2\varepsilon$ , as soon as  $n$  is large enough.

Otherwise, if  $x_{ij}^n > \varepsilon$ , as  $x_n \in U_{ij}(\varepsilon)$ , we have  $y_{ij}^n - H(x_n) \geq -\varepsilon$ . Assuming  $T_n \geq na_{\min}p_{\min}/2$  and using (3.22), we have

$$|y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n| \leq \frac{c_0}{2T_n x_i^n x_j^n} \leq \frac{c_0}{na_{\min}p_{\min}\varepsilon^2} < \frac{\varepsilon}{2},$$

as soon as  $n$  is large enough. By assumption,  $|H(x_{n+1}) - H(x_n)| < \varepsilon/2$ , so that we conclude that  $y_{ij}^{n+1} - H(x_{n+1}) \geq -2\varepsilon$ .  $\square$

**Lemme 3.13.** *For all vertices  $i$  and  $j$  such that  $i \sim j$ , we have :*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_{ij}^n (y_{ij}^n - H(x_n))^- = 0.$$

*Démonstration.* We fix  $\varepsilon > 0$  and  $m_0 \in \mathbb{N}$ , and let  $\tau_{m_0}$  be the stopping time

$$\begin{aligned} \tau_{m_0} := \inf \Big\{ n \geq m_0 : x_n \in \Delta_{\varepsilon^4} \text{ or } T_n < na_{\min}p_{\min}/2 \\ \text{or } T_n > \frac{n}{2c_1} \text{ or } |H(x_n) - H(x_{m_0})| > \frac{\varepsilon}{4} \Big\}. \end{aligned}$$

We want to prove that either  $\tau_{m_0} < \infty$  or  $x_n \in U_{ij}(3\varepsilon)$  for all  $n$  large enough. This will allow us to conclude, as Proposition 3.7, Corollary 3.8 and Theorem 2.2 imply that there exists almost surely  $m_0 \in \mathbb{N}$  s.t.  $\tau_{m_0} = \infty$ .

Let  $\sigma_{m_0}$  be the stopping time

$$\sigma_{m_0} := \inf \{ n \geq m_0 : x_n \in U_{ij}(\varepsilon) \}.$$

Lemma 3.11 (2) implies that there exists a.s. a (random)  $m_0 \in \mathbb{N}$  such that, for all  $n \geq m \geq m_0$ ,

$$(R_n - R_m)^- \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (S_n - S_m)^+ \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.24)$$

Therefore  $\tau_{m_0} < \infty$  or  $\sigma_{m_0} < \infty$ , using  $\sum_{n \geq m_0} 1/n = \infty$  and  $x_{ij}^n \leq 1$ .

For all  $n \in [\sigma_{m_0}, \tau_{m_0})$ , let  $\rho_n$  be the largest  $k \leq n$  such that  $x_k \in U_{ij}(\varepsilon)$ . By (3.24),

$$(y_{ij}^n - y_{ij}^{\rho_n+1}) \geq -\frac{\varepsilon}{2}.$$

By Lemma 3.12,  $x_{\rho_n+1} \in U_{ij}(2\varepsilon)$  : let us assume for instance that  $y_{ij}^{\rho_n+1} - H(x_{\rho_n+1}) \geq -2\varepsilon$ . Together with  $|H(x_n) - H(x_{\rho_n+1})| \leq \varepsilon/2$ , as  $n < \tau_{m_0}$ , we deduce that

$$y_{ij}^n - H(x_n) \geq y_{ij}^{\rho_n+1} - H(x_{\rho_n+1}) - \varepsilon \geq -3\varepsilon.$$

With a similar argument,  $x_{ij}^{\rho_n+1} \leq 2\varepsilon$  implies  $x_{ij}^n \leq 3\varepsilon$ . These two arguments together imply that  $x_n \in U_{ij}(3\varepsilon)$  if  $\sigma_{m_0} \leq n < \tau_{m_0}$ , which enables us to conclude.  $\square$

## CHAPITRE 4. REINFORCEMENT LEARNING IN SOCIAL NETWORKS, WITH P. TARRÈS

---

### Proof of Theorem 2.3.

For all  $n \in \mathbb{N}$ , we have

$$\begin{aligned} H(x_n) &= \sum_{i,j:ij \in E} y_{ij}^n x_{ij}^n \\ &= H(x_n) + \sum_{i,j:ij \in E} (y_{ij}^n - H(x_n))^+ x_{ij}^n - \sum_{i,j:ij \in E} (y_{ij}^n - H(x_n))^- x_{ij}^n \end{aligned}$$

Hence,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{ij}^n (y_{ij}^n - H(x_n))^- = 0$  implies

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{ij}^n (y_{ij}^n - H(x_n)) = 0.$$

Lemma 3.13 enables us to conclude. □

## 4 Remarks on the asymptotic behavior at the boundary

We show in Proposition 4.1 that, for all vertex  $i \in \mathbb{V}$ ,  $V_i^\infty = \infty$ . But this does not ensure the linear growth of  $V_i^n$  for all  $i \in \mathbb{V}$ . In this section we provide examples where some vertices are such that  $x_i^\infty = 0$  a.s. and thus  $x_n$  converges to the boundary  $\partial\Delta$ .

**Proposition 4.1.** *For all  $i \in \mathbb{V}$ ,  $V_i^\infty = \infty$  a.s.*

*Démonstration.* Fix  $i \in \mathbb{V}$  and fix  $j \in \mathbb{V}$  such that  $j \sim i$ . Consider the  $L^2$ -bounded martingale defined by  $M_0 = 0$  and, for all  $n \geq 1$ ,

$$M_n := \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{1}_{\{\Delta_{ij}^k > 0\}}}{(V_{ij}^{k-1})^2} - \sum_{k=1}^{n-1} p_{ij} \frac{1}{V_i^k V_j^k},$$

which converges such that  $\mathbb{E}(M_\infty) = 0$ . Therefore,  $\mathbb{E}(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{V_i^k V_j^k}) \leq \frac{\pi^2}{6a_{\min}^2 p_{ij}}$ , which enables us to conclude. □

Now, consider the particular case in which we assume that the graph  $G$  is defined as follows. Fix an integer  $k \geq 2$ . Then  $G$  is such that :

1.  $\mathbb{V}$  has  $k + 1$  elements ;
2.  $v \in \mathbb{V}$  has  $k$  neighbours, labelled  $u_1, \dots, u_k$  ;
3. each one of these neighbours has a single edge, i.e.  $a_{u_i u_j} = 0$ , for any  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  ;

4.  $p_{\mathbb{V}} = 1$  and  $p_V = 0$  for any subset  $V \subseteq \mathbb{V}$  such that  $V \neq \mathbb{V}$ . This implies that  $p_{u_i v} = 1$  for any  $i \in \{1, \dots, k\}$ ;
5. we choose  $v_{vu_1}^0 = a_{vu_1} > v_{vu_2}^0 = a_{vu_2} > \dots > v_{vu_k}^0 = a_{vu_k} > 0$ .

Thus,  $v, u_1, \dots, u_k$  form a star-shaped connected graph, where  $v$  is the core and  $u_1, \dots, u_k$  are satellite vertices. At each time step, on the first hand, all satellite vertices choose the core  $v$ , as they have a single edge (i.e. only one neighbour). On the other hand, the core  $v$  chooses one of his neighbour and the communication always succeeds. Hence, there is exactly one successful communication at each time step.

**Proposition 4.2.** *In the setting described above,  $x_{u_2}^n, \dots, x_{u_k}^n$  converge a.s. to 0, and  $x_{u_1}^n, x_v^n$  converge to  $1/2$  a.s.*

*Démonstration.* As a first step, one can show that the process  $\left(\frac{V_{vu_1}^n}{V_v^n}\right)_n$  fulfills the requirements of Lemma 4.2.2 in [82], which thus implies that a.s.  $\liminf_n \frac{x_{vu_1}^n}{x_v^n} > 0$ .

Moreover, recall that  $\nabla H \cdot F(x_n) \rightarrow 0$  a.s. and

$$\nabla H \cdot F(x_n) \geq \sum_{i=2}^k \frac{x_{vu_1}^n x_{vu_i}^n}{(x_v^n)^3} b^2 \geq b^2 \frac{x_{v1}^n}{x_v^n} \left(1 - \frac{x_{v1}^n}{x_v^n}\right),$$

where  $0 < b = \min\{a_{vu_1} - a_{vu_i}, i = 2, \dots, k\}$ .

Thus, we have that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{vu_1}^n}{x_v^n} = 1 \text{ a.s.}$$

On the other hand, we obviously have that  $x_{vu_1}^n / x_{u_1}^n = 1$  for any  $n \in \mathbb{N}$ . This gives us an asymptotic lower bound for the probability of success on the edge  $vu_1$ .

Finally, the generalized version of Conditional Borel-Cantelli Lemma of [23, Lemma 2.7.33] gives us the conclusion.  $\square$

**Remarque 4.3.** *If we consider the same star-shaped network in the uniform case, i.e. if  $a_{vu_1} = \dots = a_{vu_k} = 1$ , then the conclusion is totally different. One can show, thanks to exchangeability, that satellite vertices behave like a Pólya urn, i.e.  $2x_i^\infty$  has a law  $\text{beta}(1, k-1)$  for all  $1 \leq i \leq k$ , and obviously  $x_v^\infty = 1/2$ .*

*Note also that, for both this remark and Proposition 4.2, if we consider the star-shaped graph as a connected component in a larger graph, then we will conclude similar rescaled results.*

## 5 Classification of equilibria and stability

In this section, we analyze the deterministic dynamics associated to the ODE (3.5). In particular, we compute the Jacobian matrix of  $F$  and give a characterization of the stable equilibria in  $\Delta \setminus \partial\Delta$ .

## CHAPITRE 4. REINFORCEMENT LEARNING IN SOCIAL NETWORKS, WITH P. TARRÈS

---

### 5.1 Properties of Lyapunov function

In this section, we show that  $H$  is constant on each connected component of  $\Gamma$ .

Recall that  $H$  is not continuous on the boundary. Because of this fact, we first prove in Lemma 5.1 that  $H$  is constant on connected subsets of  $\Gamma$  with the same support (defined below) by a differentiability argument. Then, we conclude in Proposition 5.2, by a continuity argument, that it is in fact constant on the set of equilibria.

Let

$$\Theta := \{\theta : \theta \subseteq E\}.$$

For any  $x \in \Delta$ , we define its support

$$E_x := \{ij \in E : x_{ij} > 0\}. \quad (5.1)$$

$\Theta$  can be used as an index set to divide  $\Delta$  into several parts in the following sense : for any  $\theta \in \Theta$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_\theta &:= \{x \in \Delta : E_x = \theta\}, \\ \Gamma_\theta &:= \Delta_\theta \cap \Gamma. \end{aligned}$$

**Lemme 5.1.** *For any  $\theta \in \Theta$ ,  $H$  is constant on each component of  $\Gamma_\theta$ .*

*Démonstration.* Given  $q \in \Gamma_\theta$ , let us differentiate  $H$  at  $q$  with respect to  $x_{ij} = x_{ji}$ ,  $ij \in S_q$  without the constraint  $x \in \Delta$  :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial H}{\partial x_{ij}}(x) \right]_{x=q} &= \left[ \sum_{k,l:kl \in E_q} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left( a_{kl} p_{kl} \frac{x_{kl}^2}{x_k x_l} \right) \right]_{x=q} \\ &= \left[ 2 \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left( a_{ij} p_{ij} \frac{x_{ij}^2}{x_i x_j} \right) + 2 \sum_{k \neq j, ik \in E_q} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left( a_{ik} p_{ik} \frac{x_{ik}^2}{x_i x_k} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{k \neq i, jk \in E_q} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left( a_{jk} p_{jk} \frac{x_{jk}^2}{x_j x_k} \right) \right]_{x=q} \\ &= 2a_{ij} p_{ij} \frac{q_{ij}}{q_i q_j} \left( 2 - \frac{q_{ij}}{q_i} - \frac{q_{ij}}{q_j} \right) \\ &\quad - 2 \sum_{k \neq j: ik \in E_q} a_{ik} p_{ik} \frac{q_{ik}}{q_i q_k} \cdot \frac{q_{ik}}{q_i} - 2 \sum_{k \neq i: jk \in E_q} a_{jk} p_{jk} \frac{q_{jk}}{q_j q_k} \cdot \frac{q_{jk}}{q_j} \\ &= 2H(q) \left( 2 - \frac{q_{ij}}{q_i} - \frac{q_{ij}}{q_j} \right) - 2H(q) \left( 1 - \frac{q_{ij}}{q_i} \right) - 2H(q) \left( 1 - \frac{q_{ij}}{q_j} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

The penultimate equality comes from the fact that  $(a_{ij} p_{ij} q_{ij}) / (q_i q_j) = H(q)$  if  $ij \in E_q$ ,  $q \in \Gamma$ .  $\square$

**Proposition 5.2.**  *$H$  is constant on each connected component of  $\Gamma$ .*

*Démonstration.* Let us show that  $H$  is continuous on  $\Gamma$ , which will enable us to conclude. Indeed, suppose that  $q \in \Gamma$ , and that  $x \in \Gamma$  is in the neighbourhood of  $q \in \Gamma$  within  $\Delta$ , then  $E_x \supseteq E_q$  and, using  $x \in \Gamma$ ,

$$H(x) = \sum_{i,j:ij \in E_q} a_{ij} p_{ij} \frac{x_{ij}^2}{x_i x_j} + \sum_{i,j:ij \in E_x \setminus E_q} x_{ij} H(x),$$

so that

$$H(x) = \frac{1}{1 - \sum_{i,j:ij \in E_x \setminus E_q} x_{ij}} \sum_{i,j:ij \in E_q} a_{ij} p_{ij} \frac{x_{ij}^2}{x_i x_j},$$

and the conclusion follows.  $\square$

## 5.2 Jacobian matrix

At any equilibrium  $x \in (\Delta \setminus \partial\Delta) \cap \Gamma$  ( $F$  is not differentiable on  $\partial\Delta$ ), we calculate the Jacobian matrix

$$J(x) = \left( \frac{\partial F_{lk}}{\partial x_{ij}} \right)_{\{l,k\}, \{i,j\}: ij, lk \in E},$$

where, by a slight abuse of notation,

$$F(x) = (F_{ij}(x))_{\{i,j\}: ij \in E}.$$

For all  $ij, kl \in E$ , a simple extension of the calculation in the proof of Lemma 5.1 yields  $\frac{\partial H}{\partial x_{ij}}(x) = 4H(x)(\mathbb{1}_{\{x_{ij} \neq 0\}} - 1)$ , so that

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{lk}}{\partial x_{ij}}(x) &= -H(x)\mathbb{1}_{\{\{i,j\}=\{l,k\}, x_{lk}=0\}} + x_{lk} \frac{\partial y_{lk}}{\partial x_{ij}} - x_{lk} \frac{\partial H}{\partial x_{ij}}(x) \\ &= -H(x)\mathbb{1}_{\{\{i,j\}=\{l,k\}, x_{lk}=0\}} + H(x)\mathbb{1}_{\{\{i,j\}=\{l,k\}, x_{lk} \neq 0\}} - \frac{x_{lk}}{x_i} H(x)\mathbb{1}_{\{i \in \{l,k\}\}} \\ &\quad - \frac{x_{lk}}{x_j} H(x)\mathbb{1}_{\{j \in \{l,k\}\}} - 4x_{lk} H(x)(\mathbb{1}_{\{x_{ij} \neq 0\}} - 1). \end{aligned}$$

Therefore, for  $x_{ij} \neq 0$ , we get :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_{ij}} &= H(x) \left[ 1 - \frac{x_{ij}}{x_i} - \frac{x_{ij}}{x_j} \right]; \\ \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_{ij}} &= -\frac{x_{ik}}{x_i} H(x), k \neq j; \\ \frac{\partial F_{jk}}{\partial x_{ij}} &= -\frac{x_{jk}}{x_j} H(x), k \neq i; \end{aligned}$$

## CHAPITRE 4. REINFORCEMENT LEARNING IN SOCIAL NETWORKS, WITH P. TARRÈS

---

$$\frac{\partial F_{lk}}{\partial x_{ij}} = 0, l \neq i, j; k \neq i, j.$$

For any  $ij \in S$  s.t.  $x_{ij} = 0$ , we have :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_{ij}} &= -H(x) \\ \frac{\partial F_{lk}}{\partial x_{ij}} &= 0, l \neq i, j; k \neq i, j; x_{lk} = 0. \end{aligned}$$

We can reduce the dimension of  $x$  by making the edges that are in the graph (i.e.  $ij \in E$ ) occur only once in the whole vector.

Let  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_d$  be the connected components of the subgraph  $G_x := (\mathbb{V}, E_x)$ , where  $E_x$  is defined in (5.1). Let

$$J_x^m := \left( \frac{\partial F_{lk}}{\partial x_{ij}} \right)_{ij, kl \in \mathcal{C}_m}.$$

Therefore,  $J_x$  can be written as follows, by putting first  $ij$  and  $kl$  coordinates such that  $x_{ij} \neq 0$  and  $x_{lk} \neq 0$  (in the same order, with increasing connected components  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_d$ )

$$J(x) = \begin{pmatrix} J_x^1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_x^d & & (*) \\ & & & -H(x) & \\ & (0) & & & \ddots \\ & & & & & -H(x) \end{pmatrix}.$$

### 5.3 Classification of equilibria based on stability

Let us introduce a few definitions of stability for ordinary differential equations.

**Définition 5.3.**  $x$  is Lyapunov stable if for any neighbourhood  $U_1$  of  $x$ , there exists a neighbourhood  $U_2 \subseteq U_1$  of  $x$  such that any solution  $x(t)$  starting in  $U_2$  is such that  $x(t)$  remains in  $U_2$  for all  $t \geq 0$ .

**Définition 5.4.**  $x$  is asymptotically stable if it is Lyapunov stable and there exists a neighbourhood  $U_1$  such that any solution  $x(t)$  starting in  $U_1$  is such that  $x(t)$  converges to  $x$ .

An equilibrium that is Lyapunov stable but not asymptotically stable is called *neutrally stable* sometimes.



**Définition 5.5.**  $x$  is linearly stable if all eigenvalues of the Jacobian matrix at  $x$  have nonpositive real part; otherwise,  $x$  is called linearly unstable.

Remark that, with these definitions, linear stability allows for eigenvalues to have zero real part, and therefore does not necessarily imply Lyapunov stability. However the dynamics considered here makes these stable equilibria indeed Lyapunov stable : as in [45], we give here a stochastic version of this argument in Section 6.

**Définition 5.6.** Let

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &:= \Gamma \cap \Delta \setminus \partial\Delta, \\ \Gamma_b &:= \Gamma \cap \partial\Delta,\end{aligned}$$

and let  $\Gamma_s$  (resp.  $\Gamma_u$ ) be the set of linearly stable (resp. unstable) equilibria in  $\Gamma_0$  for the mean-field ODE.

For any  $x \in \Gamma_u$ , let

$$\mathcal{E}_x := \{\theta \in \mathbb{R}^{|E|} : |\theta| = 1 \text{ and } \exists ij \in E_x \text{ s.t. } \theta \cdot \mathbf{e}_{ij} > 0\},$$

where  $E_x$  is defined in (5.1).

Recall Definition 2.4 of a graph  $G_x$  associated to some  $x \in \Delta$ .

**Proposition 5.7.** We have

$$(a) \Gamma_s = \{x \in \Gamma_0 : P_{G_x} \text{ holds}\}.$$

(b) If  $x \in \Gamma_u$ , then there exists an eigenvector in  $\mathcal{E}_x$  whose eigenvalue has positive real part.

We are first going to prove following Lemma 5.8 giving a necessary condition on the elements of  $\Gamma_s$ . Its proof is widely inspired by that of a similar result in [11].

**Lemme 5.8.** If  $x$  is in  $\Gamma_s$ , then for all  $i, j, k$  and  $l$  in the same connected component such that  $i \stackrel{x}{\sim} j$ ,  $k \stackrel{x}{\sim} l$ , we have :

$$a_{ij}p_{ij} = a_{kl}p_{kl}.$$

Let us denote  $\mathcal{P}_a$  this last property.

*Démonstration.* We want to prove that if  $x$  is a stable configuration, then for all  $i, j$  and  $k$  in the same connected component, such that  $x_{ij} > 0$  and  $x_{ik} > 0$ ,  $a_{ij}p_{ij} = a_{ik}p_{ik}$ . Here, we chose  $x \in \Delta \setminus \partial\Delta$  in the set of equilibria, i.e. the set where  $F$  vanishes, so we have for all  $i$  and  $j$  such that  $x_{ij} > 0$  :

$$a_{ij}p_{ij} \frac{x_{ij}}{x_i x_j} = H(x).$$

## CHAPITRE 4. REINFORCEMENT LEARNING IN SOCIAL NETWORKS, WITH P. TARRÈS

---

Recall that the entries of the Jacobian matrix  $J(x)$ , computed in section 5.2, are such that, on the line corresponding to  $(i, j)$ , we have :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_{ij}} &= H(x) \left[ 1 - \frac{x_{ij}}{x_i} - \frac{x_{ij}}{x_j} \right] \\ \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_{ik}} &= -\frac{x_{ij}}{x_i} H(x), k \neq j.\end{aligned}$$

Now, assume that there exists  $i_0, j_0$  and  $k_0$  such that  $a_{i_0 j_0}, a_{i_0 k_0} > 0$ ,  $x_{i_0 j_0}, x_{i_0 k_0} > 0$ , and  $a_{i_0 j_0} p_{i_0 j_0} \neq a_{i_0 k_0} p_{i_0 k_0}$ . Let  $u$  be a vector in  $\mathbb{R}^{|E|}$ , such that :

$$u^T = (0, \dots, 0, u_{i_0 j_0}, 0, \dots, 0, u_{i_0 k_0}, 0, \dots, 0).$$

Dropping the 0 of  $i_0, j_0$  and  $k_0$  for simplicity, we have :

$$\begin{aligned}(J(x) \cdot u)_{ij} &= u_{ij} H(x) \left[ 1 - \frac{x_{ij}}{x_i} - \frac{x_{ij}}{x_j} \right] - u_{ik} \frac{x_{ij}}{x_i} H(x) \\ (J(x) \cdot u)_{ik} &= u_{ik} H(x) \left[ 1 - \frac{x_{ik}}{x_i} - \frac{x_{ik}}{x_k} \right] - u_{ij} \frac{x_{ik}}{x_i} H(x),\end{aligned}$$

hence

$$\begin{aligned}u^T J(x) u &= u_{ij}^2 H(x) \left[ 1 - \frac{x_{ij}}{x_i} - \frac{x_{ij}}{x_j} \right] + u_{ik}^2 H(x) \left[ 1 - \frac{x_{ik}}{x_i} - \frac{x_{ik}}{x_k} \right] \\ &\quad - u_{ij} u_{ik} H(x) \left( \frac{x_{ij}}{x_i} + \frac{x_{ik}}{x_i} \right).\end{aligned}$$

Then, we chose  $u_{ij} = \frac{1}{x_{ij}}$  and  $u_{ik} = -\frac{1}{x_{ik}}$ . So, we have :

$$u^T J(x) u = \frac{H(x)}{x_{ij}^2} \left[ 1 - \frac{x_{ij}}{x_j} \right] + \frac{H(x)}{x_{ik}^2} \left[ 1 - \frac{x_{ik}}{x_k} \right].$$

Notice that  $H(x) > 0$ ,  $\frac{x_{ij}}{x_j} \neq 1$  or  $\frac{x_{ik}}{x_k} \neq 1$ . Indeed, if  $\frac{x_{ij}}{x_j} = \frac{x_{ik}}{x_k} = 1$ , as  $a_{ij} p_{ij} \frac{x_{ij}}{x_j} = a_{ik} p_{ik} \frac{x_{ik}}{x_k}$  (we are on the set of equilibria), then we would have  $a_{ij} p_{ij} = a_{ik} p_{ik}$ , which is not the case, by assumption.

Finally,  $u^T J(x) u > 0$ , hence  $x$  is not stable.

So we can conclude that if  $x$  is a stable configuration, then for all  $i, j$  and  $k$  such that  $x_{ij}, x_{ik} > 0$ , then  $a_{ij} p_{ij} = a_{ik} p_{ik}$ . And consequently, for all  $i, j, k$  and  $l$  in the same connected component, such that  $x_{ij}, x_{kl} > 0$ , we have  $a_{ij} p_{ij} = a_{kl} p_{kl}$ .  $\square$

This last lemma implies that  $\Gamma_s \subseteq \{x \in \Gamma_0 : \mathcal{P}_a \text{ holds}\} =: \Gamma_0^a$ .

To prove Proposition 5.7, we need following Lemma 5.9 on the structure of  $G_x$  when  $x \in \Gamma_0^a$ .

**Lemme 5.9.** *For all  $x \in \Gamma_0^a$  such that  $P_{G_x}$  does not hold, then there is at least one connected component on which every vertex has at least two edges.*

*Démonstration.* Assume that  $x$  is in  $\Gamma_0^a$  and  $P_{G_x}$  does not hold. Assume by contradiction that, on any connected component, there exists a vertex  $j$  linked to only one vertex, say  $i$ . So, we have  $\frac{x_{ij}}{x_j} = 1$ . Then, as  $x \in \Gamma_0^a$ , for all  $k$  such that  $x_{ik} > 0$ , we have :

$$p_{ik} \frac{a_{ik} x_{ik}}{x_i x_k} = p_{ij} \frac{a_{ij} x_{ij}}{x_i x_j} \Rightarrow \frac{x_{ik}}{x_k} = 1,$$

then  $k$  is only linked to  $i$ , and therefore each connected component of  $G_x$  is star-shaped, which contradicts the assumption that  $P_{G_x}$  does not hold, and allows to conclude.  $\square$

**Proof of Proposition 5.7.** First, assume that  $x \in \Gamma_0^a$  and  $P_{G_x}$  does not hold. We want to prove that  $x \in \Gamma_u$ . Lemma 5.9 implies that  $G_x$  has a connected component on which each vertex has at least two edges, which we assume w.l.o.g. to be  $\mathcal{C}_1$ . Let  $V(\mathcal{C}_1)$  (resp.  $E(\mathcal{C}_1)$ ) be its set of vertices (resp. edges). Let us show that  $J_x^1$  has at least one eigenvalue with positive real part.

Compute the trace of  $J_x^1$  :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(J_x^1) &= H(x) \sum_{\{i,j\}: i \sim j} \left(1 - \frac{x_{ij}}{x_i} - \frac{x_{ij}}{x_j}\right) \\ &= H(x)(|E(\mathcal{C}_1)| - |V(\mathcal{C}_1)|) \geq 0. \end{aligned}$$

The last inequality comes from the fact that each vertex has at least two edges. It is easy to check that  $(1, \dots, 1) \cdot J_x^1 = -H(x)(1, \dots, 1) < 0$ , then  $-H(x)$  is an eigenvalue of  $J_x^1$ , therefore there exists a positive eigenvalue, and we conclude the first part of **(a)**, together with the fact that  $\Gamma_s \subseteq \Gamma_0^a$ .

Now, assume that  $x \in \Gamma_0^a$  and  $P_{G_x}$  holds. Then, each connected component of  $G_x$  is star-shaped. Let us assume for instance that  $\mathcal{C}_1$  is composed of a nucleus  $v$  and satellite vertices  $1, \dots, k$ . Then, for all  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $x_{iv} = x_i$ , and we have :

$$J_x^1 = -\frac{H(x)}{x_v} \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_1 \\ x_2 & \dots & x_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_k & \dots & x_k \end{pmatrix}.$$

The rank of  $J_x^1$  is 1, 0 and  $-H(x) < 0$  are eigenvalues, as  $(1, \dots, 1) \cdot J_x^1 = -H(x)(1, \dots, 1)$ , so all its eigenvalues are nonpositive, which completes the proof.

$\square$

**Remarque 5.10.** First, there may be no stable configuration on  $\Delta \setminus \partial\Delta$ . Besides, if the number of vertices is even, it is now easy to see that if  $x$  consists in a one-to-one correspondence of the vertices, i.e. if each connected component has only two vertices (and one edge), then  $x$  is asymptotically stable.

## 6 Proof of Theorem 2.8

Assume that  $(G, (a_{ij}, p_{ij})_{ij \in E})$  is such that  $\Gamma_s \neq \emptyset$ . Let us prove the following result which implies Theorem 2.8.

**Théorème 6.1.** *Let  $q \in \Gamma_s$ , and let  $\mathcal{N}(q)$  be a neighbourhood of  $q$  in  $\Delta$ . Then, with positive probability,*

- (a)  $x_n \rightarrow x \in \mathcal{N}(q)$  s.t.  $G_x = G_q$ .
- (b)  $V_{ij}^\infty = \infty \iff \{i, j\}$  is an edge of  $G_q$ .

Theorem 6.1 is a simple consequence of the following Proposition. Before stating it, we need some definitions.

Let  $\mathcal{G} \subseteq G$  be some graph such that  $P_{\mathcal{G}}$  holds (see Definition 2.5). In particular, each connected component is star-shaped and for all  $i, j, k$  and  $l$  in the same connected component, s.t.  $ij \in \mathcal{G}$  and  $kl \in \mathcal{G}$ ,  $p_{ij}a_{ij} = p_{kl}a_{kl}$ . Moreover, each connected component contains a nucleus vertex (i.e. any other vertex in the same component has only one neighbour), which is chosen arbitrarily if the connected component has only two vertices. We denote  $N_{\mathcal{G}}$  the set of nucleus vertices of  $\mathcal{G}$ .

Let  $\pi := \pi_{\mathcal{G}} : \mathbb{V} \longrightarrow N_{\mathcal{G}}$  be the function mapping  $i \in V$  to the nucleus vertex of the connected component that  $i$  belongs to.

For all  $i \in \mathbb{V}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  and  $\varepsilon > 0$ , let us define

$$\begin{aligned} \alpha_i^n &:= x_i^n / x_{\pi(i)}^n, \\ H_n^1 &:= \bigcap_{i \in \mathbb{V}, i = \pi(i)} \{V_i^n \geq 2\varepsilon n\}, \\ H_n^2 &:= \bigcap_{i \in \mathbb{V}} \{\alpha_i^n \geq \varepsilon\}, \\ H_n^3 &:= \bigcap_{i, j \in \mathbb{V}, i \neq \pi(j), j \neq \pi(i)} \{V_{ij}^n \leq \sqrt{n}\}. \end{aligned}$$

Obviously, all these definitions depend on the graph  $\mathcal{G}$ , but we forget to write this dependency in order not to make the notations heavier.

**Proposition 6.2.** *Let  $\mathcal{G}$  be such that  $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}$  holds, and let  $\pi := \pi_{\mathcal{G}}$ . For all  $\varepsilon \in (0, p_{\min})$ , if  $H_n^1$ ,  $H_n^2$  and  $H_n^3$  hold, and  $n \geq \mathbf{Cst}(\varepsilon, (p_{ij}, a_{ij})_{i, j \in \mathbb{V}}, |\mathbb{V}|)$ , then, with lower bounded probability (only depending on  $\varepsilon$ ,  $(p_{ij}, a_{ij})_{i, j \in \mathbb{V}}$ , and  $|\mathbb{V}|$ ), for all  $i, j \in \mathbb{V}$ ,  $k \geq n$ ,*

$$V_{ij}^\infty = V_{ij}^n, \text{ when } i \neq \pi(j), j \neq \pi(i); \quad (6.1)$$

$$\alpha_i^k / \alpha_i^n \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon); \quad (6.2)$$

$$V_i^k \geq \varepsilon k, \text{ when } \pi(i) = i. \quad (6.3)$$

In the remainder of this section, we fix the graph  $(\mathcal{G}, \mathcal{L})$  (and thus  $\pi = \pi_{\mathcal{G}}$  and the events  $H_n$ 's) and  $\varepsilon > 0$ . The proof consists of the following Lemmas 6.3, 6.4 and 6.5.

Let, for all  $i, j \in S$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}\tau_n^{1,i,j} &:= \inf\{k \geq n : V_{ij}^k \neq V_{ij}^n\}; \\ \tau_n^{2,i} &:= \inf\{k \geq n : \alpha_i^k / \alpha_i^n \notin (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)\}; \\ \tau_n^{3,i} &:= \inf\{k \geq n : V_i^k < \varepsilon k\},\end{aligned}$$

and let

$$\tau_n^1 := \inf_{i,j \in \mathbb{V}, i \neq \pi(j), j \neq \pi(i)} \tau_n^{1,i,j}, \quad \tau_n^2 := \inf_{i \in \mathbb{V}} \tau_n^{2,i}, \quad \tau_n^3 := \inf_{i \in \mathbb{V}, \pi(i)=i} \tau_n^{3,i}, \quad \tau_n := \tau_n^1 \wedge \tau_n^2 \wedge \tau_n^3.$$

**Lemme 6.3.** *If  $n \geq \mathbf{Cst}(\varepsilon, (p_{ij}, a_{ij})_{i,j \in \mathbb{V}}, |\mathbb{V}|)$ , then*

$$\mathbb{P}\left(\tau_n^1 > \tau_n^2 \wedge \tau_n^3 \mid \mathcal{F}_n, H_n^1, H_n^2, H_n^3\right) \geq \exp\left(-3|\mathbb{V}|^2 \max_{i,j \in \mathbb{V}} \{a_{ij}\} \varepsilon^{-4}\right).$$

*Démonstration.* Assuming  $n \geq \mathbf{Cst}(\varepsilon, (p_{ij}, a_{ij})_{i,j \in \mathbb{V}}, |\mathbb{V}|)$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\tau_n^1 > \tau_n^2 \wedge \tau_n^3 \mid \mathcal{F}_n, H_n^1, H_n^2, H_n^3\right) &\geq \prod_{k \geq n} \left(1 - \sum_{i,j: i \neq \pi(j), j \neq \pi(i)} a_{ij} p_{ij} \frac{(V_{ij}^n)^2}{V_i^k V_j^k}\right) \\ &\geq \exp\left(-\frac{3 \max_{i,j \in \mathbb{V}} \{a_{ij}\}}{2} \sum_{i,j: i \neq \pi(j), j \neq \pi(i), k \geq n} \frac{n}{\varepsilon^4 k^2}\right) \\ &\geq \exp\left(-3|\mathbb{V}|^2 \max_{i,j \in \mathbb{V}} \{a_{ij}\} \varepsilon^{-4}\right).\end{aligned}$$

□

**Lemme 6.4.** *If  $n \geq \mathbf{Cst}(\varepsilon, (p_{ij}, a_{ij})_{i,j \in \mathbb{V}}, |\mathbb{V}|)$  then, for all  $i \in S$ ,*

$$\mathbb{P}\left(\tau_n^{2,i} > \tau_n^1 \wedge \tau_n^3 \mid \mathcal{F}_n, H_n^1, H_n^2, H_n^3\right) \geq 1 - 2 \exp(-\mathbf{Cst}(\varepsilon)n).$$

*Démonstration.* Fix  $i \in \mathbb{V}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , and assume w.l.o.g. that  $\pi(i) \neq i$ .

Let, for all  $j \in \mathbb{V}$  and  $k \geq n$ ,

$$\hat{V}_j^k := V_j^n + \sum_{l \in \mathcal{L}_j} (V_{jl}^k - V_{jl}^n),$$

which is equal to  $V_j^k$  as long as  $k < \tau_n^1$ .

Let, for all  $k \geq n$ ,

$$W_k := \log \frac{\hat{V}_i^k}{\hat{V}_{\pi(i)}^k},$$

## CHAPITRE 4. REINFORCEMENT LEARNING IN SOCIAL NETWORKS, WITH P. TARRÈS

---

and let us consider the Doob decomposition of  $(W_k)_{k \geq n}$  :

$$W_k = W_n + \Delta_k + \Psi_k,$$

$$\Delta_k := \sum_{j=n+1}^k \mathbb{E}(W_j - W_{j-1} | \mathcal{F}_{j-1}).$$

In the following computation, we write  $u = \square(v)$  if  $|u| \leq v$ , for all  $u, v \in \mathbb{R}$ . Assume that  $H_n^1$ ,  $H_n^2$  and  $H_n^3$  hold, and that  $k < \tau_n$  : then, using that, for all  $j \stackrel{g}{\sim} \pi(i)$ ,  $p_{i\pi(i)} a_{i\pi(i)} = p_{j\pi(i)} a_{j\pi(i)}$ ,

$$\begin{aligned} |\Delta_{k+1} - \Delta_k| &= |\mathbb{E}[W_{k+1} - W_k | \mathcal{F}_k]| \\ &= \left| a_{i\pi(i)} p_{i\pi(i)} \left( \frac{V_{i\pi(i)}^k}{V_i^k} \right)^2 \frac{1}{V_{\pi(i)}^k} (1 + \square((V_i^k)^{-1}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{j \stackrel{g}{\sim} \pi(i)} a_{j\pi(i)} p_{j\pi(i)} \frac{V_{\pi(i)j}^k}{V_j^k} \frac{V_{\pi(i)j}^k}{(V_{\pi(i)})^2} (1 + \square((V_{\pi(i)})^{-1})) \right| \\ &= \frac{a_{i\pi(i)} p_{i\pi(i)}}{V_{\pi(i)}^k} \left| 1 + k^{-1/2} \square(\text{Cst}(\varepsilon, (p_{ij}, a_{ij})_{i,j \in \mathbb{V}}, |\mathbb{V}|)) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j \stackrel{g}{\sim} \pi(i)} \left( 1 + k^{-1/2} \square(\text{Cst}(\varepsilon, (p_{ij}, a_{ij})_{i,j \in \mathbb{V}}, |\mathbb{V}|)) \right) \frac{V_{\pi(i)j}^k}{V_{\pi(i)}^k} \right| \\ &= k^{-3/2} \square(\text{Cst}(\varepsilon, (p_{ij}, a_{ij})_{i,j \in \mathbb{V}}, |\mathbb{V}|)), \end{aligned}$$

where we use that, for all  $j \stackrel{g}{\sim} \pi(i)$ ,

$$\left| \frac{V_{\pi(i)j}^k}{V_j^k} - 1 \right|, \left| \sum_{l \stackrel{g}{\sim} \pi(i)} \frac{V_{\pi(i)l}^k}{V_{\pi(i)}^k} - 1 \right| \leq k^{-1/2} \text{Cst}(\varepsilon, (p_{ij}, a_{ij})_{i,j \in \mathbb{V}}, |\mathbb{V}|). \quad (6.4)$$

Therefore, for all  $k \geq n$ ,

$$|\Delta_k| \leq n^{-1/2} \text{Cst}(\varepsilon, (p_{ij}, a_{ij})_{i,j \in \mathbb{V}}, |\mathbb{V}|).$$

Let us now estimate the martingale increment :  $|\Psi_{k+1} - \Psi_k| \leq \text{Cst}(\varepsilon) k^{-1}$  (since  $|W_{k+1} - W_k| \leq \text{Cst}(\varepsilon) k^{-1}$ ), so that [45, Lemma 7.4] (stated here as Lemma 6.6) implies

$$\mathbb{P} \left( \sup_{k \geq n} |\Psi_k - \Psi_n| \mathbf{1}_{\{k \leq \tau_n\}} \leq \varepsilon/2 \right) \geq 1 - 2 \exp(-\text{Cst}(\varepsilon)n),$$

which completes the proof.  $\square$

**Lemme 6.5.** *If  $\varepsilon \in (0, a_{\min} p_{\min})$  and  $n \geq \mathbf{Cst}(\varepsilon, (p_{ij}, a_{ij})_{i,j \in \mathbb{V}}, |\mathbb{V}|)$  then, for all  $i \in \mathbb{V}$  such that  $\pi(i) = i$  (i.e.  $i \in N_{\mathcal{G}}$ ),*

$$\mathbb{P}\left(\tau_n^{3,i} > \tau_n^1 \wedge \tau_n^2 \mid \mathcal{F}_n, H_n^1, H_n^2, H_n^3\right) > 1 - 2 \exp(-\mathbf{Cst}(\varepsilon)n).$$

*Démonstration.* Let  $n \in \mathbb{N}$ , assume that  $H_n^1$ ,  $H_n^2$  and  $H_n^3$  hold, and fix  $i \in \mathbb{V}$  such that  $\pi(i) = i$ . Let us consider the Doob decomposition of  $(V_i^k)_{k \geq n}$  :

$$\begin{aligned} V_i^k &:= V_i^n + \Phi_k + \Xi_k \\ \Phi_k &:= \sum_{j=n+1}^k \mathbb{E}\left(V_i^j - V_i^{j-1} \mid \mathcal{F}_{j-1}\right). \end{aligned}$$

Now, for all  $\eta > 0$ , if  $n \geq \mathbf{Cst}(\eta, \varepsilon)$  and  $k < \tau_n$ , (6.4) implies

$$\Phi_{k+1} - \Phi_k = \mathbb{E}\left(V_i^{k+1} - V_i^k \mid \mathcal{F}_k\right) \geq \sum_{j \stackrel{g}{\sim} i} a_{ij} p_{ij} \frac{(V_{ij}^k)^2}{V_i^k V_j^k} \geq a_{\min} p_{\min} - \eta,$$

where the constant  $\eta$  will be fixed at the end of the proof.

Let us now estimate the martingale increment : let, for all  $p \geq n$ ,

$$\chi_p := \sum_{k=n}^{p-1} \frac{\Xi_{k+1} - \Xi_k}{k}.$$

Then, for all  $p \geq n$ ,

$$\Xi_p = \sum_{n \leq k \leq p-1} (\chi_{k+1} - \chi_k)k = - \sum_{n \leq k \leq p-1} \chi_k + (p-1)\chi_p.$$

This implies, using [45, Lemma 7.4] (see Lemma 6.6) and  $|\Xi_{k+1} - \Xi_k| \leq 1$  for all  $k \geq n$ , that for all  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\forall k \geq n, V_i^k \geq (2\varepsilon - \eta)n + (k - n)(a_{\min} p_{\min} - \eta) \mid \mathcal{F}_n\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\sup_{p \geq n} \left| \frac{\Xi_p}{p} \right| \leq \eta \mid \mathcal{F}_n\right) \geq \mathbb{P}\left(\sup_{k \geq n} |\chi_k| \leq \frac{\eta}{2} \mid \mathcal{F}_n\right) \geq 1 - 2 \exp(-\mathbf{Cst}(\eta)n); \end{aligned}$$

we choose  $\eta = \min(\varepsilon, a_{\min} p_{\min} - \varepsilon)$ , which completes the proof.  $\square$

**Lemme 6.6** (Lemma 7.4 of [45]). *Let  $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$  be a deterministic sequence of positive reals, let  $\mathbb{G} := (\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a filtration, and let  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a  $\mathbb{G}$ -adapted martingale such that  $|M_{n+1} - M_n| \leq \gamma_n$  for all  $n \in \mathbb{N}$ . Then, for all  $n \in \mathbb{N}$  and  $\lambda > 0$ ,*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k \geq n} (M_k - M_n) \geq \lambda \mid \mathcal{G}_n\right) \leq \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2 \sum_{k \geq n} \gamma_k^2}\right).$$





# Bibliographie

- [1] Daniel J. Amit, G. Parisi, and L. Peliti. Asymptotic behavior of the “true” self-avoiding walk. *Phys. Rev. B* (3), 27(3) :1635–1645, 1983.
- [2] R. Argiento, R. Pemantle, B. Skyrms, and S. Volkov. Learning to signal : Analysis of a micro-level reinforcement model. *Stochastic processes and their applications*, 119(2) :373–390, 2009.
- [3] Anne-Laure Basdevant, Bruno Schapira, and Arvind Singh. Localization of a vertex reinforced random walk on  $\mathbb{Z}$  with sub-linear weight, 2012.
- [4] Anne-Laure Basdevant, Bruno Schapira, and Arvind Singh. Localization on 4 sites for vertex-reinforced random walks on  $\mathbb{Z}$ , 2012.
- [5] A. W. Beggs. On the convergence of reinforcement learning. *Journal of Economic Theory*, 122 :1–36, 2005.
- [6] Gérard Ben Arous and Jiří Černý. Bouchaud’s model exhibits two different aging regimes in dimension one. *Ann. Appl. Probab.*, 15(2) :1161–1192, 2005.
- [7] Gérard Ben Arous and Jiří Černý. Dynamics of trap models. In *Mathematical statistical physics*, pages 331–394. Elsevier B. V., Amsterdam, 2006.
- [8] Gérard Ben Arous and Jiří Černý. Scaling limit for trap models on  $\mathbb{Z}^d$ . *Ann. Probab.*, 35(6) :2356–2384, 2007.
- [9] Gérard Ben Arous, Jiří Černý, and Thomas Mountford. Aging in two-dimensional Bouchaud’s model. *Probab. Theory Related Fields*, 134(1) :1–43, 2006.
- [10] Gérard Ben Arous and Alexander Fribergh. Random walks on random graphs. 2013.
- [11] M. Benaïm and P. Tarrès. Dynamics of vertex-reinforced random walk. *Ann. Probab.*, 39(6) :2178–2223, 2011.
- [12] Michel Benaïm. Vertex-reinforced random walks and a conjecture of Pemantle. *Ann. Probab.*, 25(1) :361–392, 1997.
- [13] Michel Benaïm. Dynamics of stochastic approximation algorithms. In *Séminaire de Probabilités, XXXIII*, volume 1709 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–68. Springer, Berlin, 1999.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [14] Michel Benaïm, Olivier Raimond, and Bruno Schapira. Strongly reinforced vertex-reinforced-random-walk on the complete graph, 2012.
- [15] Michel Benaïm and Pierre Tarrès. Dynamics of vertex-reinforced random walks. *Ann. Probab.*, 39(6) :2178–2223, 2011.
- [16] N. Berger, A. Drewitz, and A. F. Ramírez. Effective Polynomial Ballisticity Condition for Random Walk in Random Environment. *ArXiv e-prints*, June 2012.
- [17] É. Bouchet, A. F. Ramírez, and C. Sabot. Sharp ellipticity conditions for ballistic behavior of random walks in random environment. *ArXiv e-prints*, October 2013.
- [18] Élodie Bouchet. Sub-ballistic random walk in Dirichlet environment. *Electron. J. Probab.*, 18 :no. 58, 25, 2013.
- [19] D. Campos and A. F. Ramírez. Ellipticity criteria for ballistic behavior of random walks in random environment. *ArXiv e-prints*, December 2012.
- [20] Jun Chen and Gady Kozma. Vertex-reinforced random walk on  $\mathbb{Z}$  with sub-square-root weights is recurrent. 2014.
- [21] A. A. Chernov. Replication of a multicomponent chain by the “lightning mechanism”. *Biophysics*, 12(2) :336–341, 1967.
- [22] Don Coppersmith and Persi Diaconis. Random walks with reinforcement. *Unpublished manuscript*, 1986.
- [23] Didier Dacunha-Castelle and Marie Duflo. *Probability and statistics. Vol. II*. Springer-Verlag, New York, 1986. Translated from the French by David McHale.
- [24] Burgess Davis. Reinforced random walk. *Probab. Theory Related Fields*, 84(2) :203–229, 1990.
- [25] M. Disertori, C. Sabot, and P. Tarrès. Transience of Edge-Reinforced Random Walk. *ArXiv e-prints*, March 2014.
- [26] A. Drewitz and A. F. Ramírez. Ballisticity conditions for random walk in random environment. *ArXiv e-prints*, March 2009.
- [27] A. Drewitz and A. F. Ramírez. Quenched exit estimates and ballisticity conditions for higher-dimensional random walk in random environment. *ArXiv e-prints*, May 2010.
- [28] Laure Dumaz. A clever (self-repelling) burglar. *Electron. J. Probab.*, 17 :no. 61, 17, 2012.
- [29] Laure Dumaz and Bálint Tóth. Marginal densities of the “true” self-repelling motion. *Stochastic Process. Appl.*, 123(4) :1454–1471, 2013.
- [30] R. Durrett. *Probability : Theory and Examples*. Duxbury Press, Belmont, CA, Third Edition, 2004.
- [31] R. Durrett. *Probability : Theory and Examples*. Number vol. 3 in Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 2010.

- 
- [32] R. T. Durrett and L. C. G. Rogers. Asymptotic behavior of Brownian polymers. *Probab. Theory Related Fields*, 92(3) :337–349, 1992.
  - [33] Nathanaël Enriquez and Christophe Sabot. Edge oriented reinforced random walks and RWRE. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 335(11) :941–946, 2002.
  - [34] Nathanaël Enriquez, Christophe Sabot, and Olivier Zindy. Aging and quenched localization for one-dimensional random walks in random environment in the sub-ballistic regime. *Bull. Soc. Math. France*, 137(3) :423–452, 2009.
  - [35] Nathanaël Enriquez, Christophe Sabot, and Olivier Zindy. Limit laws for transient random walks in random environment on  $\mathbb{Z}$ . *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(6) :2469–2508, 2009.
  - [36] I. Erev and A. E. Roth. Predicting how people play games : Reinforcement learning in experimental games with unique, mixed strategy equilibria. *The American Economic Review*, 88 :848–881, 1998.
  - [37] Anna Erschler, Balint Tóth, and Wendelin Werner. Some locally self-interacting walks on the integers, 2010.
  - [38] Anna Erschler, Balint Tóth, and Wendelin Werner. Stuck walks, 2010.
  - [39] Alexander Fribergh. Biased random walk in positive random conductances on  $\mathbb{Z}$ . 2011.
  - [40] Alexander Fribergh and Daniel Kious. Local trapping for elliptic random walks in random environments in  $\mathbb{Z}^d$ . 2014.
  - [41] D. Fudenberg and D. K. Levine. *The Theory of Learning in Games*. Cambridge : MIT Press, 1998.
  - [42] D.H. Greene and D.E. Knuth. *Mathematics for the Analysis of Algorithms*. Progress in Computer Science and Applied Logic. Birkhäuser Boston, 1990.
  - [43] J. Hofbauer and K. Sigmund. *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge : Cambridge University Press, 1998.
  - [44] E. Hopkins and M. Posch. Attainability of boundary points under reinforcement learning. *Games and Economic Behavior*, 53 :110–125, 2005.
  - [45] Yilei Hu, Brian Skyrms, and Pierre Tarrès. Reinforcement learning in a signaling game. 2011.
  - [46] Daniel Kious. Stuck walks : a conjecture of Erschler, Tóth and Werner. 2013.
  - [47] Daniel Kious and Pierre Tarrès. Reinforcement learning in social networks. 2014.
  - [48] D. Lewis. *Convention : A Philosophical Study*. Harvard : Harvard University Press, 1969.
  - [49] Vlada Limic and Pierre Tarrès. Attracting edge and strongly edge reinforced walks. *Ann. Probab.*, 35(5) :1783–1806, 2007.
-

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [50] Vlada Limic and Pierre Tarrès. What is the difference between a square and a triangle? In *In and out of equilibrium. 2*, volume 60 of *Progr. Probab.*, pages 481–495. Birkhäuser, Basel, 2008.
- [51] J. Maynard Smith. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge : Cambridge University Press, 1982.
- [52] Thomas Mountford and Pierre Tarrès. An asymptotic result for Brownian polymers. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 44(1) :29–46, 2008.
- [53] J. Neveu. *Discrete Parameter Martingales*. North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [54] R. Pemantle. *Random processes with reinforcement*. Massachussets Institute of Technology doctoral dissertation, 1988.
- [55] R. Pemantle. Nonconvergence to unstable points in urn models and stochastic approximations. *Annals of Probability*, 18 :698–712, 1990.
- [56] Robin Pemantle. Phase transition in reinforced random walk and RWRE on trees. *Ann. Probab.*, 16(3) :1229–1241, 1988.
- [57] Robin Pemantle. Random processes with reinforcement. *Ph.D. dissertation*, 1988.
- [58] Robin Pemantle. Nonconvergence to unstable points in urn models and stochastic approximations. *Ann. Probab.*, 18(2) :698–712, 1990.
- [59] Robin Pemantle. Vertex-reinforced random walk. *Probab. Theory Related Fields*, 92(1) :117–136, 1992.
- [60] Robin Pemantle. A survey of random processes with reinforcement. *Probab. Surv.*, 4 :1–79, 2007.
- [61] Robin Pemantle and Stanislav Volkov. Vertex-reinforced random walk on  $\mathbf{Z}$  has finite range. *Ann. Probab.*, 27(3) :1368–1388, 1999.
- [62] F. Rassoul-Agha and T. Seppäläinen. Almost sure functional central limit theorem for ballistic random walk in random environment. *Annales de L’Institut Henri Poincare Section Physique Theorique*, 45 :373–420, May 2009.
- [63] Christophe Sabot. Random walks in random Dirichlet environment are transient in dimension  $d \geq 3$ . *Probab. Theory Related Fields*, 151(1-2) :297–317, 2011.
- [64] Christophe Sabot. Random Dirichlet environment viewed from the particle in dimension  $d \geq 3$ . *Ann. Probab.*, 41(2) :722–743, 2013.
- [65] Christophe Sabot and Pierre Tarrès. Edge-reinforced random walk, vertex-reinforced jump process and the supersymmetric hyperbolic sigma model. *Accepted for publication in the Journal of the European Mathematical Society*, 2013.
- [66] Christophe Sabot and Pierre Tarrès. Ray-knight theorem : a short proof. 2013.
- [67] Christophe Sabot and Laurent Tournier. Reversed Dirichlet environment and directional transience of random walks in Dirichlet environment. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 47(1) :1–8, 2011.

- 
- [68] Bruno Schapira. A 0 – 1 law for vetted-reinforced random walks on  $\mathbb{Z}$  with weight of order  $k^\alpha$ ,  $\alpha < 1/2$ . 2012.
  - [69] T. Sellke. Reinforced random walk on the  $d$ -dimensional integer lattice. *Markov Process. Related Fields*, 14(2) :291–308, 2008.
  - [70] F. Simenhaus. Asymptotic direction for random walks in random environment. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 47(1) :1–8, 2007.
  - [71] Ya. G. Sinai. The limit behavior of a one-dimensional random walk in a random environment. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 27(2) :247–258, 1982.
  - [72] Arvind Singh. Recurrence for vertex-reinforced random walks on  $\mathbb{Z}$  with weak reinforcements. 2014.
  - [73] B. Skyrms. *Signals : Evolution, Learning, and Information*. Oxford : Oxford University Press, 2010.
  - [74] Brian Skyrms and Robin Pemantle. A dynamic model of social network formation. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 97(16) :9340–9346, 2000.
  - [75] Fred Solomon. Random walks in a random environment. *Ann. Probability*, 3 :1–31, 1975.
  - [76] Alain-Sol Sznitman. Slowdown estimates and central limit theorem for random walks in random environment. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 2(2) :93–143, 2000.
  - [77] Alain-Sol Sznitman. On a class of transient random walks in random environment. *Ann. Probab.*, 29(2) :724–765, 2001.
  - [78] Alain-Sol Sznitman. An effective criterion for ballistic behavior of random walks in random environment. *Probab. Theory Related Fields*, 122(4) :509–544, 2002.
  - [79] Alain-Sol Sznitman. Topics in random walks in random environment. In *School and Conference on Probability Theory*, ICTP Lect. Notes, XVII, pages 203–266 (electronic). Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2004.
  - [80] Alain-Sol Sznitman and Martin Zerner. A law of large numbers for random walks in random environment. *Ann. Probab.*, 27(4) :1851–1869, 1999.
  - [81] P. Tarrès. Pièges répulsifs. *C.R.Acad.Sci.Paris Sér. I Math*, 330 :125–130, 2000.
  - [82] P. Tarrès. Bandit à deux bras. *Traps of stochastic algorithms and vertex-reinforced random walks (Dphil)*, pages 59–65, 2001.
  - [83] Pierre Tarrès. Vertex-reinforced random walk on  $\mathbb{Z}$  eventually gets stuck on five points. *Ann. Probab.*, 32(3B) :2650–2701, 2004.
  - [84] Pierre Tarrès. Localization of reinforced random walks. 2011.
  - [85] Bálint Tóth. The “true” self-avoiding walk with bond repulsion on  $\mathbb{Z}$  : limit theorems. *Ann. Probab.*, 23(4) :1523–1556, 1995.
  - [86] Bálint Tóth. The “true” self-avoiding walk with bond repulsion on  $\mathbb{Z}$  : limit theorems. *Ann. Probab.*, 23(4) :1523–1556, 1995.
-

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [87] Bálint Tóth. Self-interacting random motions. In *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, volume 201 of *Progr. Math.*, pages 555–564. Birkhäuser, Basel, 2001.
- [88] Bálint Tóth. Self-interacting random motions. In *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, volume 201 of *Progr. Math.*, pages 555–564. Birkhäuser, Basel, 2001.
- [89] Bálint Tóth and Wendelin Werner. The true self-repelling motion. *Probab. Theory Related Fields*, 111(3) :375–452, 1998.
- [90] Laurent Tournier. Integrability of exit times and ballisticity for random walks in Dirichlet environment. *Electron. J. Probab.*, 14 :no. 16, 431–451, 2009.
- [91] Stanislav Volkov. Vertex-reinforced random walk on arbitrary graphs. *Ann. Probab.*, 29(1) :66–91, 2001.
- [92] Stanislav Volkov. Phase transition in vertex-reinforced random walks on  $\mathbb{Z}$  with non-linear reinforcement. *J. Theoret. Probab.*, 19(3) :691–700, 2006.
- [93] Peyton Young. *Strategic learning and its limits*. Oxford : Oxford University Press, 2004.
- [94] O. Zeitouni. Random walks in random environments. *ArXiv Mathematics e-prints*, April 2003.
- [95] M. Zerner. A non-ballistic law of large numbers for random walks in i.i.d. random environment. *Electron. Comm. Probab.*, 7 :191—197, 2002.
- [96] O. Zindy. Scaling limit and aging for directed trap models. *ArXiv e-prints*, December 2007.

## Résumé

Les processus inter-agissants et les environnements aléatoires sont les objets centraux de cette thèse, qui s'articule autour de trois travaux.

Nous nous intéressons d'abord à une conjecture d'Erschler, Tóth et Werner sur un modèle de marches aléatoires auto-interagissantes sur la droite des entiers, appelées les *Stuck Walks*, mêlant répulsion des arêtes voisines et attraction des arêtes voisines des voisines. Nous démontrons que ces marches se localisent presque sûrement sur des intervalles arbitrairement grands, dont la taille dépend de la valeur d'un certain paramètre.

Nous présentons ensuite un travail en collaboration avec A. Fribergh dans lequel nous étudions des marches aléatoires en milieux aléatoires. Il est connu que ces marches peuvent être transientes dans une direction donnée mais non-ballistiques, ralenties par la présence de pièges dans leur environnement. Dans cet article, nous cherchons à montrer que les pièges typiques sont des hypercubes unité. Nous énonçons un critère d'ellipticité garantissant la ballisticité d'une marche aléatoire en milieu aléatoire transiente dans une direction donnée. D'autre part, nous démontrons que si le temps de sortie moyen d'un hypercube unité est infini, alors la marche a une vitesse asymptotique nulle.

Enfin, la dernière partie est issue d'un travail en collaboration avec P. Tarrès. Nous proposons un modèle de création de réseaux sociaux basé sur l'apprentissage par renforcement. Nous démontrons que le taux de communication moyen augmente en moyenne, donc converge, et qu'un graphe limite apparaît. Nous montrons également que les configurations stables sont des graphes dont les composantes connexes sont en forme d'étoile. Réciproquement, nous prouvons que tout graphe ayant la propriété précédente, et dans lequel aucun sommet n'est isolé, est une configuration limite avec probabilité strictement positive.

**Mots clés :** renforcement, localisation, marches aléatoires en milieux aléatoires, ellipticité, ballisticité, apprentissage par renforcement, réseaux sociaux, algorithmes stochastiques.

## Abstract

Interacting processes and random environments are the main focus of this thesis, which consists of three different works.

First, we study a conjecture of Erschler, Tóth and Werner about a model of interacting random walks on the integer line, called *Stuck Walks*, for which there is competition between repulsion from the neighbouring edges and attraction from the next-to-neighbouring edges. We prove that these walks localize on arbitrarily large intervals, the size of which depends on the value of some parameter.

Second, we present a joint work with A. Fribergh in which we study some random walks in random environments. It is already known that such walks can be directionally transient without being ballistic, because of traps slowing down the walker. In this article, we aim to show that typical traps are unit hypercubes. We prove an ellipticity criterion which implies ballisticity of random walks in random environments that are directionally transient. This criterion deals with the expected exit time of a unit hypercube. We also show that if the annealed expected exit time of a unit hypercube is infinite then the walk has zero asymptotic velocity.

Finally, in a joint work with P. Tarrès, we propose a model of social network formation based on reinforcement learning. We prove that the expected rate of communication increases in average and thus converges almost surely, and that a limit graph emerges. We show that stable configurations for this graph consist of star-shaped connected components with uniform weights. Conversely, any graph correspondence with the preceding property, and within which every vertex is connected to at least another one, is a limit configuration with positive probability.

**Key words :** reinforcement, stuck walks, localization, random walks in random environments, ellipticity, ballisticity, reinforcement learning, social network, stochastic algorithms.